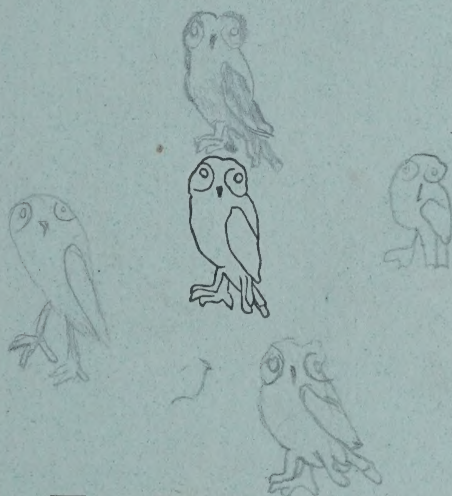
Een Krommenbundel van den Derden en een Krommennet van den Vierden Graad.



F. JENSEMA.

GEBROEDERS HOITSEMA. — 1900. — GRONINGEN.

EEN KROMMENBUNDEL VAN DEN DERDEN EN EEN KROMMENNET VAN DEN VIERDEN GRAAD.

EEN KROMMENBUNDEL VAN DEN DERDEN EN EEN KROMMENNET VAN DEN VIERDEN GRAAD.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE

RIJKS-UNIVERSITEIT TE GRONINGEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. H. HAGA,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

TEGEN DE BEDENKINGEN DER FACULTEIT IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN,

op Vrijdag den 9den Februari 1900,

des namiddags om 3 uur,

DOOR

ELIBERT JENSEMA,

geboren te STEDUM.

GEDRUKT BIJ GEBROEDERS HOITSEMA, GRONINGEN.

Aan mijne Vrouw

opgedragen.

Bij het eindigen van mijn akademische studie is het mij een aangename taak, een woord van dank te brengen aan U, Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige faculteit, voor het onderwijs, dat ik van U heb mogen ontvangen.

In het bijzonder dank aan U, Hooggeleerde SCHOUTE, *wiens grooten steun ik bij het samenstellen van dit proefschrift in zoo ruime mate heb ondervonden.*

ERRATA.

	staat:	lees:
blz. 29, r. 2	$= - \frac{1}{\lambda_i}$	$= - \frac{1}{\lambda'_i}$
	van $\frac{1}{\lambda_i}$	van $- \frac{1}{\lambda_i}$
blz. 32, r. 13	$- 2\lambda xy^2$	$- 2\lambda xy$
blz. 59, r. 5	o	of

I. Krommenbundel van den derden graad.

a. Meetkundige behandeling.

Inleiding.

Laten O_1, O_2, O_3 (fig. 1) de hoekpunten zijn van een rechthoekigen driehoek met de zijden l_{12}, l_{13}, l_{23}. Is A_1 het voetpunt van de hoogtelijn op de schuine zijde neergelaten en zijn M_{12}, M_{13}, M_{23} de middens der zijden, c_{12}, c_{13} de cirkels op de zijden l_{13}, l_{12} als middellijnen beschreven, dan heeft men de stelling:

„De punten O_1 (viermaal geteld), O_2, O_3, A_1 en de twee „onbestaanbare cirkelpunten ω_1, ω_2 vormen de basispunten „van een bundel circulaire krommen van den derden graad „met een dubbelpunt in O_1. Tot dezen bundel behooren „de ontaarde krommen (l_{12}, c_{12}), (l_{13}, c_{13}), l_{23} met den „puntcirkel O_1, en bovendien de cirkel c_{11} op l_{23} als mid„dellijn beschreven met de rechte lijn $O_1A_1 = l_{11}$ vereenigd."

Bij een willekeurigen krommenbundel van den derden graad is de meetkundige plaats der tangentiaalpunten van een basispunt een kromme van den vierden graad met een drievoudig punt in dat basispunt, die bovendien eenmaal door de overige acht basispunten gaat. Bij den orthocentrischen bundel [1]) splitst deze kromme zich voor elk der punten O_i in drie lijnen en de lijn in

---

[1]) Prof. dr. P. H. Schoute. „Quelques figures à $n + 2$ inversions dans l'espace à n dimensions", *Archives Teyler*, Série II, T. V., Troisième partie

Aan de hand van hetgeen in deze verhandeling voorkomt over de vlakke krommen van den derden en vierden graad van het eerste geslacht, heb ik de rationale onderzocht. Bovendien heb ik deze krommen C_0^3 analytisch behandeld en zoodoende langs twee wegen dezelfde resultaten verkregen. Het spreekt van zelf, dat ik voor het bewijs van sommige stellingen kon verwijzen naar het overeenkomstige bij de orthocentrische bundels. Om niet den geheelen titel op te geven heb ik dit telkens aldus aangeduid: (Zie S. pag . . ., noot . . .).

het oneindige (l_∞) en voor elk der punten A_{ik} in twee lijnen en een cirkel door de punten A_{ik} (negenpuntscirkel). Bij den bovengenoemden bundel, dien wij *rechthoekigen* bundel zullen noemen, omdat hij op de aangegeven wijze met een rechthoekigen driehoek in verband staat, zal de meetkundige plaats der bij het punt O_2 behoorende tangentiaalpunten bestaan uit l_{12} (tweemaal), l_{23}, l_∞; voor die bij O_3 vindt men l_{13} (tweemaal), l_{23}, l_∞. Voor het punt A_1 zal zij bestaan uit de lijnen l_{23}, O_1A_1 en een cirkel, die behalve A_1 ook $M_{12'}$, M_{13} bevat — aangezien A_1M_{13} in A_1 raakt aan c_{13} en A_1M_{12} in A_1 raakt aan c_{12} — en dus de negenpuntscirkel van den rechthoekigen driehoek is.

Bij een willekeurigen bundel is de meetkundige plaats der buigpunten een kromme van den twaalfden graad c^{12}, die driemaal door elk der basispunten gaat. Bij den orthocentrischen bundel splitst deze zich in de zes rechte lijnen l_{ik} en een kromme c^6, die driemaal door de cirkelpunten ω_1, ω_2 gaat en bovendien eenmaal door de punten A_i. Bij den rechthoekigen bundel splitst zij zich in zes rechte lijnen [n.l. l_{12} (tweemaal), l_{13} (tweemaal), l_{23} en O_1A_1], den puntcirkel (O_1) en een bicirculaire kromme van den vierden graad met een dubbelpunt in O_1. Dat deze c^4 tweemaal door O_1 gaat, blijkt als volgt. Van de snijpunten der c^{12} met een willekeurige C^3 uit den bundel zullen er vijftien vallen in de punten O_2, O_3, A_1, ω_1, ω_2 en drie in de buigpunten. De achttien overigen liggen in O_1, waaruit blijkt, dat de kromme c^{12} negenmaal door O_1 gaat; van deze negen takken vallen er zeven af, omdat l_{12} en l_{13} beide tweemaal geteld en O_1A_1, $O_1\omega_1$, $O_1\omega_2$ elk eenmaal geteld tot de c^{12} behooren. Derhalve gaat de overschietende kromme c^4 tweemaal door O_1.

De achttien in O_1 samengevallen snijpunten van c^{12} met een willekeurige C^3 uit den bundel zijn ontstaan uit viermaal drie snijpunten der vier basispunten, welke in O_1 zijn samengevallen, en bovendien uit de zes buigpunten, welke door het optreden van het dubbelpunt verdwenen zijn.

Inversie.

De rechthoekige bundel, welke bij den driehoek $O_1O_2O_3$ behoort, is anallagmatisch ten opzichte van twee inversies; van de eerste inversie is O_2 het middelpunt en cirkel [O_2] de meetkundige plaats der dubbelpunten, terwijl voor de tweede O_3 met [O_3] deze rol spelen.

Dat elke willekeurige kromme C_i^3 uit den bundel door die inversies in zich zelf overgaat, blijkt aldus. Door C_i^3 te inverteeren

uit O_2 zal men in de eerste plaats een C^3 terugkrijgen; want een kromme C^n, die α-maal door P, β-maal door ω_1, γ-maal door ω_2 gaat en dus kan worden voorgesteld door $C^n(P^\alpha, \omega^\beta_1, \omega^\gamma_2)$, gaat door inversie uit P in een $C^{2n-(\alpha+\beta+\gamma)}(P^{n-\beta-\gamma}, \omega_1^{n-\alpha-\gamma}, \omega_2^{n-\alpha-\beta})$ over. De geïnverteerde $C_i'^3$ van een willekeurige C_i^3 uit den bundel zal dus eenmaal door ω_1, ω_2 en O_2 gaan en bovendien tweemaal door O_1 en, daar A_1 in O_3 en O_3 in A_1 overgaat, eenmaal door O_3 en A_1. Dus hebben C_i^3 en $C_i'^3$ de negen basispunten gemeen; doch C_i^3 snijdt $[O_2]$ behalve in de punten O_1, ω_1, ω_2 nog in twee punten R en S, welke door de inversie in zich zelf zullen overgaan en derhalve tot beide krommen behooren. De krommen C_i^3 en $C_i'^3$ hebben dus elf punten gemeen en vallen geheel samen.

De cirkels $[O_2]$ en $[O_3]$ snijden elkaar loodrecht en zijn altijd bestaanbaar. Een kromme C^3 wordt in O_2 en O_3 aangeraakt door lijnen, die evenwijdig zijn aan de bestaanbare asymptoot, en in het punt A_1 door een lijn, die antiparallel is aan de asymptoot met betrekking tot O_2O_3, terwijl het tangentiaalpunt van A_1, dat op den negenpuntscirkel ligt, samenvalt met het tangentiaalpunt van het bestaanbare punt in het oneindige (vergelijk de analytische behandeling, pag. 22).

Elke C^3 wordt door de beide cirkels $[O_2]$ en $[O_3]$ in twee punten loodrecht gesneden. Zij R een punt van C^3 op $[O_2]$, dan zal ergens op O_2R nog een punt van C^3 moeten liggen, maar aangezien dit punt door inversie in R moet overgaan, zal het met R samenvallen. De lijn O_2R is dus raaklijn aan C^3 in R en daarmee is de loodrechte snijding aangetoond. Een uitzondering hierop maken de ontaarde krommen.

Voortbrenging.

Een kromme uit den rechthoekigen bundel is op twee wijzen de omhullende van cirkels (epicykels), die een vasten cirkel (richtcirkel) loodrecht snijden, en wier middelpunten liggen op een parabool (deferent). De twee richtcirkels zijn de elkaar loodrecht snijdende cirkels $[O_2]$ en $[O_3]$. De beide parabolen zijn confocaal.

Aangezien een kromme uit den bundel anallagmatisch is ten opzichte van O_3 zal een cirkel [P] (fig. 2), die $[O_3]$ loodrecht snijdt, de kromme in vier punten B, B′, C en C′ zóó snijden, dat de verbindingslijnen $BB' = b$ en $CC' = c$ door O_3 gaan. De loodlijnen uit P op b en c neergelaten zullen een kromme van de tweede klasse omhullen, als we P het geheele vlak laten doorloopen.

Deze omhullende zal even als bij den orthocentrischen bundel een parabool zijn, waarvan de as loodrecht staat op de raaklijn in O_3 aan C^3. Neemt men nu een punt op die parabool aan als middelpunt van een cirkel, die $[O_3]$ loodrecht snijdt, dan zullen de lijnen b' en c' naast elkaar vallen; dan zullen ook b en c samenvallen en derhalve B met C en B′ met C′: de cirkel zal dus de kromme C^3 in twee punten aanraken.

Neemt men een punt van O_1O_2 als middelpunt van een loodrecht snijdenden cirkel aan, dan zullen we op dien cirkel (buiten O_1) slechts twee snijpunten met C^3 vinden, derhalve slechts een as b'; daaruit volgt, dat O_1O_2 raakt aan den deferent en wel, zooals we zullen aantoonen, in het punt O_1. Uit het anallagmatisch zijn van de kromme volgt, dat de dubbelpuntsraaklijnen van C^3 antiparallel zijn met betrekking tot O_1O_2 (of O_1O_3). Trekt men door O_3 een willekeurige lijn q, dan verkrijgt men op de kromme twee punten Q en Q′; de loodlijn q' op het midden van QQ′ zal raaklijn zijn aan de parabool. Laat men nu q om O_3 wentelen, tot zij oneindig dicht bij O_3O_1 is gekomen, dan zal de loodlijn q' door O_1 gaan en met O_2O_1 samenvallen, omdat we in dit grensgeval een oneindig kleinen gelijkbeenigen driehoek O_1QQ' verkrijgen; de loodlijn op het midden der grondlijn QQ′ gaat door den top O_1 en valt samen met de lijn, die den tophoek middendoor deelt. Er gaan door O_1 twee samengevallen raaklijnen, derhalve is O_1 het raakpunt op O_1O_2.

Elke deferent, die behoort bij den richtcirkel $[O_3]$, raakt O_1O_2 in O_1 aan, bovendien raakt hij (zie fig. 1) de lijn QM_{12} aan, die A_1O_2 loodrecht middendoor deelt. Bepalen we nu een kromme uit den rechthoekigen bundel door haar bestaanbaar punt op l_∞, dan is ook de deferent bepaald, daar dan de richting naar het oneindige is gegeven. Laat nu (fig. 3) $O_1M_{12}M_{23}M_{13}$ de negenpuntscirkel zijn en A_1L de richting van de asymptoot aangeven; dan is A_1T de raaklijn in A_1 en doet A_1K loodrecht op A_1L de richting naar het oneindige van den deferent kennen. Om nu het brandpunt te bepalen trekken we door O_1 een lijn antiparallel aan O_1S (O_1S en $M_{12}R$ zijn evenwijdig getrokken aan A_1K) ten opzichte van O_1O_3 (en O_1O_2) en door M_{12} een lijn, die met $M_{12}O_1$ een hoek maakt gelijk aan hoek $RM_{12}Q$. Deze lijnen zullen elkaar dan in F op den negenpuntscirkel snijden en F zal diametraal tegenover T liggen, zooals gemakkelijk volgt uit de betrekkingen

$$bg\ M_{13}O_1 = bg\ A_1M_{13} = bg\ M_{12}M_{23},$$
$$bg\ SA_1 = bg\ RM_{12} = bg\ M_{23}T.$$

Het brandpunt van den deferent, behoorende bij $[O_3]$ ligt dus op den negenpuntscirkel en diametraal tegenover het tangentiaalpunt van A_1. Op dezelfde wijze zal men hetzelfde resultaat vinden voor den deferent van den richtcirkel $[O_2]$. Hieruit blijkt, dat de deferenten confocaal zijn.

Een kromme C^3 is op twee wijzen de meetkundige plaats van grenspunten van een oneindig aantal cirkelbundels, waarvan elke bundel bepaald is door een der twee richtcirkels en een raaklijn aan den bijbehoorenden deferent [1]).

Brandpunten.

Een willekeurige kromme uit den rechthoekigen bundel heeft vier gewone brandpunten en één afzonderlijk brandpunt. De vier gewone brandpunten zijn de twee paren snijpunten der beide richtcirkels $[O_2]$ en $[O_3]$ met hunne deferenten p_2 en p_3. Het afzonderlijk brandpunt is het gemeenschappelijk brandpunt der deferenten.

Gewone brandpunten zijn de snijpunten der raaklijnen, die men *uit* de onbestaanbare cirkelpunten ω_1 en ω_2 aan de kromme kan trekken; omdat we hier krommen van het geslacht nul — en derhalve van de klasse vier — hebben, kunnen we door elk punt van een kromme twee lijnen trekken, die haar elders aanraken. Uit ω_1 twee raaklijnen en eveneens uit ω_2; deze leveren vier snijpunten en dus vier gewone brandpunten. Beschouwt men de brandpunten als punten, waar de kromme door puntcirkels dubbel wordt aangeraakt, dan komt men tot hetzelfde resultaat. We hebben dan de punten te zoeken, waar de straal van den epicykel nul wordt; dit is het geval in de snijpunten van den deferent met zijn bijbehoorenden richtcirkel. Nu leveren $[O_2]$ en p_2 ons buiten het dubbelpunt O_1 twee snijpunten; eveneens $[O_3]$ en p_3. Derhalve vier brandpunten: van de zestien brandpunten eener kromme uit den orthocentrischen bundel zijn er door het optreden van het dubbelpunt twaalf verdwenen.

Het afzonderlijk brandpunt van een kromme is het snijpunt der raaklijnen, die de kromme *in* de punten ω_1 en ω_2 aanraken. De raaklijnen in ω_1 aan de krommen C^3 van den orthogonalen bundel vormen om ω_1 een stralenbundel $[l_1]$; de raaklijnen uit ω_1 getrokken aan de bij de krommen behoorende deferenten vor-

[1]) Zie S. pag. 7, noot 9.

men eveneens een bundel (λ_1). Deze twee bundels zijn projectief verwant; immers elke raaklijn l_1 bepaalt één kromme C^3, deze C^3 bepaalt één deferent en hierdoor is weer één bepaalde λ_1 aangegeven. Op de stralen l_1 liggen de afzonderlijke brandpunten der krommen C^3 en op de stralen λ_1 liggen de brandpunten der parabolen. Om ω_2 als top krijgt men twee dergelijke stralenbundels. Bij twee projectieve bundels met denzelfden top gebeurt het in het algemeen tweemaal, dat twee overeenkomstige stralen samenvallen; geschiedt dit echter driemaal, dan zal elk paar samenvallen. Dit is hier het geval. De afzonderlijke brandpunten der ontaarde krommen (l_{12}, c_{12}), (l_{13}, c_{13}), (l_{11}, c_{11}) vallen samen met de brandpunten hunner deferenten; de afzonderlijke brandpunten dezer krommen zijn M_{13}, M_{12}, M_{23}. De brandpunten van een deferent verkrijgt men door het punt te nemen, dat op c_n diametraal tegenover het tangentiaalpunt van A_1 ligt; voor de brandpunten der deferenten, behoorende bij de drie ontaarde krommen, vindt men op die wijze eveneens M_{13}, M_{12}, M_{23}.

Hieruit volgt, dat voor elke kromme het afzonderlijk brandpunt samenvalt met het gemeenschappelijk brandpunt der deferenten.

Zooals boven is gezegd, liggen van de vier gewone brandpunten er twee op [O_2] en twee op [O_3]. Zijn f_1 en f_2 twee bestaanbare brandpunten op een der richtcirkels b.v. [O_2], dan zullen f_3 en f_4 op [O_3] de antipunten zijn van f_1 en f_2; m.a.w. f_3 en f_4 zijn dan twee onbestaanbare punten op de lijn, die $f_1 f_2$ loodrecht middendoor deelt. Is $2a$ de afstand van f_1 tot f_2, zoo is de afstand van f_3 tot $f_1 f_2$ door $+ ia$ en van f_4 tot dezelfde lijn door $- ia$ voorgesteld.

Door inversie gaat een dubbelrakende cirkel over in een dubbelrakenden cirkel en een dubbelrakende puntcirkel in een dubbelrakenden puntcirkel, dus een gewoon brandpunt in een gewoon brandpunt. De brandpunten f_1 en f_2 op [O_2] liggen derhalve op een lijn door O_3, evenzoo f_3 en f_4 op [O_3] op een lijn door O_2; deze twee lijnen staan rechthoekig op elkaar, aangezien twee brandpunten de antipunten zijn der beide anderen.

Uit de wijze, waarop we ons voorstellen, dat een dubbelrakende cirkel is ontstaan uit een willekeurigen cirkel, die een der richtcirkels rechthoekig snijdt (fig. 2), n.l. door het samenvallen van B met C en B′ met C′, volgt, dat de verbindingslijn der raakpunten door O_3 gaat en ze de raaklijn, in het middelpunt van den cirkel aan den deferent getrokken, loodrecht snijdt. Dit zal ook

het geval zijn, als de epicykel overgaat in een puntcirkel; bij gevolg zullen twee richtlijnen gaan door O_3 en twee door O_2, terwijl ze loodrecht staan op de raaklijn aan den deferent in het brandpunt, waarbij ze behooren.

Geeft men op $[O_2]$ een punt f_1 als brandpunt van een kromme, dan zijn daardoor de overige drie brandpunten bepaald; de bij deze kromme behoorende deferent p_2 zal moeten gaan door f_1, f_2 en bovendien $[O_2]$ aanraken in het punt O_1. De vier punten f_1, f_2, O_1 en het opvolgende punt op $[O_2]$ bepalen een bundel kegelsneden, waarvan de assen evenwijdig loopen, omdat er een cirkel tot dien bundel behoort; de assen der beide parabolen uit dien bundel staan dus loodrecht op elkaar. In de eerste plaats volgt hieruit, dat de krommen van den rechthoekigen bundel twee aan twee dezelfde brandpunten hebben (deze noemt men confocaal); verder dat de assen der deferenten van twee confocale krommen loodrecht op elkaar staan, waaruit dan weer blijkt, dat zij elkaar rechthoekig snijden in de punten O_2, O_3 en A_1.

Hoe snijden twee confocale krommen C^3 elkaar in het dubbelpunt? De dubbelpuntsraaklijnen vormen een straleninvolutie om O_1; de meetkundige plaats der snijpunten der stralenparen dezer involutie met den projectieven bundel van raaklijnen in A_1 is dan een kromme van den derden graad, waartoe de rechte O_1A_1 behoort. Dus blijft er nog een kegelsnede K^2 over. Deze K^2 gaat door O_1 en raakt de lijnen A_1M_{13} en A_1M_{12} in de punten M_{13} en M_{12} aan, daar O_1M_{13} en O_1M_{12} de dubbelstralen der genoemde involutie zijn. Hierdoor is K^2 bepaald en zou zij geconstrueerd kunnen worden.

De kegelsnee K^2 zal (fig. 4) geheel liggen in de kwadranten I en III; uit den loodrechten stand der raaklijnen aan twee confocalen in A_1 volgt, dat als de raaklijn aan de eene kromme ligt in het eerste en derde kwadrant, de raaklijn uit A_1 aan haar confocale zal liggen in het tweede en vierde; m.a.w. als de raaklijn in A_1 aan de eerste kromme bestaanbare snijpunten met K^2 oplevert, dan zullen de snijpunten van de raaklijn aan de tweede kromme met K^2 onbestaanbaar zijn.

Zijn dus de dubbelpuntsraaklijnen van een kromme bestaanbaar, dan zijn die van haar confocale onbestaanbaar en omgekeerd. De confocale van een kromme met een knooppunt is een kromme met een geïsoleerd punt. Een uitzondering hierop maken de ontaarde krommen (l_{12}, c_{12}) en (l_{13}, c_{13}).

Omdat twee confocale krommen C^3 elkaar in A_1 loodrecht snijden,

valt het afzonderlijk brandpunt van C^3 samen met het tangentiaalpunt van A_1 ten opzichte van haar confocale en omgekeerd.

Meetkundige plaatsen.

Als een kromme C^3 den rechthoekigen bundel doorloopt, dan heeft men:

α. De beide deferenten doorloopen elk een schaar. De schaar van parabolen p_3 heeft tot basisraaklijnen l_∞, $M_{12}Q$ en de twee samengevallen raaklijnen l_{12}. De beide scharen zijn projectief verbonden door den bundel C^3. Zij hebben een kromme gemeen n.l. de kromme, die ontaardt in het punt O_1 en het oneindig ver gelegen punt van $M_{12}Q$; ze behooren dus tot een zelfde weefsel.

β. Het afzonderlijk brandpunt doorloopt c_n.

γ. De gewone brandpunten op $[O_2]$ (en op dezelfde wijze op $[O_3]$) vormen een involutie van puntenparen, waarvan O_1 en S_{23} de dubbelpunten zijn.

δ. Het snijpunt van een C^3 met haar bestaanbare asymptoot doorloopt c_n; dit punt ligt diametraal tegenover het afzonderlijk brandpunt en valt samen met het tangentiaalpunt van A_1.

ε. De confocale krommen C^3 vormen een involutie, waarvan de beide krommen, die l_∞ in ω_1 en ω_2 aanraken, de dubbelelementen zijn. De assen der deferenten, behoorende bij twee confocale krommen, snijden elkaar op c_n.

ζ. De asymptoot omhult een kromme van de derde klasse. Immers, een lijn m door een willekeurig punt P zal asymptoot zijn aan een kromme uit den bundel, als het snijpunt van m en de lijn n, welke laatste door A_1 antiparallel aan m met betrekking tot O_2O_3 getrokken wordt, op den negenpuntscirkel c_n ligt. De lijnen m_i vormen om P een stralenbundel en de lijnen n_i eveneens om A_1. Deze bundels zijn projectief verwant; de snijpunten van overeenkomstige stralen liggen op een gelijkzijdige hyperbool (A_1O_1 en O_2O_3 geven de richting naar het oneindige), welke c_n (behalve in A_1) in drie punten snijdt; derhalve gaan er door P drie asymptoten.

---

b. Analytische behandeling.

Neemt men (fig. 1) O_1O_2 en O_1O_3 tot coördinaatassen aan en stelt men O_1O_2 en O_1O_3 door $2a$ en $2b$ voor, dan vindt men voor de vergelijking van den bundel

$$x(x^2 - 2ax + y^2) + \lambda \{y(x^2 - 2by + y^2)\} = 0 \;\ldots\ldots\; (1).$$

De vergelijking der dubbelpuntsraaklijnen wordt nu derhalve $ax^2 + \lambda by^2 = 0$. Men ziet onmiddellijk, dat deze raaklijnen aan weerskanten gelijke hoeken maken met de x-as en alleen samenvallen voor $\lambda = 0$ (kromme l_{12}, c_{12}) en $\lambda = \infty$ (kromme l_{13}, c_{13}); overigens komen er in den bundel alleen krommen met knooppunt of met geïsoleerd punt voor.

Meetkundige plaats der buigpunten.

Om de meetkundige plaats der buigpunten te vinden bepalen we de vergelijking van de kromme van HESSE. Deze kromme is de meetkundige plaats der punten, waarvoor de poolkegelsnede een dubbelpunt heeft en dus ontaardt. De snijpunten van de kromme van HESSE met de oorspronkelijke kromme liggen in de dubbelpunten of buigpunten van de laatste.

De algemeene vergelijking van de kromme van HESSE, die we $H = 0$ zullen noemen, is

$$H \equiv \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx^2}, & \frac{d^2f}{dx\,dy}, & \frac{d^2f}{dx\,dz} \\ \frac{d^2f}{dx\,dy}, & \frac{d^2f}{dy^2}, & \frac{d^2f}{dy\,dz} \\ \frac{d^2f}{dx\,dz}, & \frac{d^2f}{dy\,dz}, & \frac{d^2f}{dz^2} \end{vmatrix} = 0,$$

als men gebruik maakt van homogene coördinaten.

De vergelijking der kromme van HESSE, welke behoort bij kromme (1), wordt derhalve

$$\begin{vmatrix} 3x + \lambda y - 2a, & \lambda x + y, & ax \\ \lambda x + y, & x + 3\lambda y - 2\lambda b, & \lambda by \\ ax, & \lambda by, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Door eliminatie van λ uit deze laatste vergelijking en (1) vindt men de meetkundige plaats der buigpunten. Stellen we ter bekorting $x^2 + y^2 - 2ax = A$ en $x^2 + y^2 - 2by = B$, dan levert dit

$$\begin{vmatrix} y\{(3x - 2a)B - xA\}, & y^2B - x^2A, & aBxy \\ y^2B - x^2A, & -x\{(3y - 2b)A - yB\}, & -bAxy \\ aBxy, & -bAxy, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Deze vergelijking is van den twaalfden graad. Wij kunnen deelen door x^2y^2, $ax - by$ en $bxA + ayB = (x^2 + y^2)(bx + ay - 2ab)$; dan zijn de zes lijnen en de puntcirkel ter zijde gesteld en er blijft over

$$AB - axB - byA = 0,$$

of

$$(x^2 + y^2)^2 - 3(ax + by)(x^2 + y^2) + 8\,abxy = 0.$$

Deze vergelijking stelt een kromme van den vierden graad voor met een dubbelpunt in den oorsprong, die bovendien tweemaal door de onbestaanbare cirkelpunten gaat. Bepaalt men n.l. de snijpunten van de kromme met een cirkel $x^2 + y^2 = r^2$, dan vindt men er slechts vier in het eindige; wijl de andere vier in het oneindige moeten liggen, gaat de kromme tweemaal door ω_1 en ω_2.

Een andere methode om de meetkundige plaats der buigpunten te vinden is de volgende. Wanneer de vergelijking van een kromme kan worden gebracht in den vorm

$$u_n + u_{n-1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

waarin u_n alleen termen van den n^{den} en u_{n-1} alleen termen van den $(n-1)^{sten}$ graad bevat, dan kan men de beide coördinaten x en y uitdrukken in een zelfde hulpveranderlijke. Stelt men n.l. $y = tx$ en substitueert men dit in (2), dan verkrijgt men — als $f_{(\lambda)}(t)$ een functie van den graad λ in t voorstelt —

$$x^n f_{(n)}(t) + x^{n-1} f_{(n-1)}(t) = 0$$

en dus

$$x = -\frac{f_{(n-1)}(t)}{f_{(n)}(t)}, \quad y = -\frac{t f_{(n-1)}(t)}{f_{(n)}(t)}.$$

Door nu t alle mogelijke waarden te geven, verkrijgt men alle punten van de kromme door (2) voorgesteld. Zoo gaat de vergelijking

$$x(x^2 + y^2 - 2ax) + \lambda y(x^2 + y^2 - 2by) = 0,$$

als wij $y = tx$ stellen, over in

$$(1 + \lambda t + t^2 + \lambda t^3)\,x^3 - 2(a + \lambda b t^2)\,x^2 = 0$$

en dit geeft

$$x = \frac{2(a + \lambda b t^2)}{1 + \lambda t + t^2 + \lambda t^3},\; y = \frac{2t\,(a + \lambda b t^2)}{1 + \lambda t + t^2 + \lambda t^3}.$$

Had men oorspronkelijk homogene coördinaten genomen, dan zou men gevonden hebben

$$x = 2\,(a + \lambda b t^2),\; y = 2t\,(a + \lambda b t^2),\; z = 1 + \lambda t + t^2 + \lambda t^3,$$

zoo als blijkt, als men in het bovenstaande x en y door $\frac{x}{z}$ en $\frac{y}{z}$ vervangt. Voor de regelmaat gaan we met deze homogene coördinaten verder.

De voorwaarde, dat drie opeenvolgende punten van de kromme op een zelfde lijn liggen, is

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \triangle x, & \triangle y, & \triangle z \\ \triangle^2 x, & \triangle^2 y, & \triangle^2 z \end{vmatrix} = 0$$

en dus in t

$$\begin{vmatrix} 2a + 2\lambda b t^2, & 2at + 2\lambda b t^3, & 1 + \lambda t + t^2 + \lambda t^3 \\ 4\lambda b t, & 2a + 6\lambda b t^2, & \lambda + 2t + 3\lambda t^2 \\ 4\lambda b, & 12\lambda b t, & 2 + 6\lambda t \end{vmatrix} = 0.$$

Na eenige herleiding vindt men

$$D \equiv \begin{vmatrix} 3a, & at, & 3 + \lambda t \\ \lambda b t, & a, & \lambda + t \\ \lambda b, & 3\lambda b t, & 1 + 3\lambda t \end{vmatrix} = 0.$$

Deze vergelijking van den derden graad in t doet zien, dat elke kromme drie buigpunten heeft.

Nu is verder

$$bD \equiv \begin{vmatrix} 3a, & at, & 3b + \lambda b t \\ \lambda b t, & a, & \lambda b + bt \\ \lambda b, & 3\lambda b t, & b + 3\lambda b t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a, & at, & 3b + (\lambda b - a)t \\ \lambda b t, & a, & bt + (\lambda b - a) \\ \lambda b, & 3\lambda b t, & b \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda b D \equiv \begin{vmatrix} 3a, & at, & 3\lambda b + \lambda(\lambda b - a)t \\ \lambda b t, & a, & \lambda b t + \lambda(\lambda b - a) \\ \lambda b, & 3\lambda b t, & \lambda b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a, & at, & 3(\lambda b - a) + \lambda t(\lambda b - a) \\ \lambda b t, & a, & \lambda(\lambda b - a) \\ \lambda b, & 3\lambda b t, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dus ook

$$D \equiv \begin{vmatrix} 3a\ , & at\ , & 3+\lambda t \\ \lambda bt\ , & a\ , & \lambda \\ 1\ , & 3t\ , & 0 \end{vmatrix} (\lambda b - a) = 0,$$

of

$$D = (\lambda b - a) \begin{vmatrix} 3a\ , & t\ , & 3+\lambda t \\ \lambda bt\ , & 1\ , & \lambda \\ a\ , & 3t, & 0 \end{vmatrix} = (\lambda b - a) \begin{vmatrix} 3a\ , & t\ , & 3 \\ \lambda bt\ , & 1\ , & 0 \\ a\ , & 3t\ , & -3\lambda t \end{vmatrix} = 0.$$

Elimineeren we nu uit $D = 0$, $y = tx$ en $xA + \lambda By = 0$, waarin $A = x^2 + y^2 - 2ax$ en $B = x^2 + y^2 - 2by$ is, λ en t, dan vinden we de vergelijking van de meetkundige plaats der buigpunten.

In de eerste plaats wordt aan $D = 0$ voldaan, als $\lambda b - a = 0$ is, of — de waarde voor λ uit $xA + \lambda By = 0$ ingevoegd — als $bAx + aBy = 0$ is.

Dit geeft

$$(x^2 + y^2)\ (bx + ay - 2ab) = 0$$

en dus

$$x^2 + y^2 = 0 \ldots\ldots \text{ puntcirkel } O_1,$$

$$bx + ay - 2ab = 0 \ldots\ldots \text{ de rechte lijn } O_2O_3.$$

In de tweede plaats is $D = 0$, als

$$\begin{vmatrix} 3a\ , & t\ , & 3 \\ \lambda bt\ , & 1\ , & 0 \\ a\ , & 3t\ , & -3\lambda t \end{vmatrix} = 0, \text{ of } \begin{vmatrix} 3\,aBxy\ , & y\ , & Bxy \\ -\,bAxy\ , & x\ , & 0 \\ aBxy\ , & 3y\ , & Axy \end{vmatrix} = 0 \text{ is.}$$

Deze voorwaarde splitst zich in $x^2y^2 = 0$,

of

$$x^2 = 0 \ldots\ldots \text{ de lijn } O_1O_3 \text{ tweemaal},$$

$$y^2 = 0 \ldots\ldots \text{ de lijn } O_1O_2 \text{ tweemaal}$$

en in

$$3aABx - aB^2x - 3bABy + bA^2y = 0,$$

of

$$ax\,(AB - B^2) + by\,(A^2 - AB) + (2ax - 2by)\,AB = 0,$$

of

$$-\,axB\,(-A + B) - byA\,(-A + B) + (2ax - 2by)\,AB = 0,$$

of

$$2\,(ax - by)\{AB - axB - byA\} = 0\,,$$

d. i. in

$$ax - by = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{de rechte lijn } O_1A_1$$

en in

$$AB - axB - byA \equiv (x^2 + y^2)^2 - 3(ax + by)\,(x^2 + y^2) + 8abxy = 0.$$

Dit laatste is weer de bicirculaire kromme van den vierden graad met dubbelpunt in O_1.

Omhullende der lijn door drie buigpunten.

Voor de kromme van Hesse vonden we de vergelijking

$$H \equiv \begin{vmatrix} 3x + \lambda y - 2a\,, & \lambda x + y\,, & ax \\ \lambda x + y\,, & x + 3\lambda y - 2\lambda b\,, & \lambda by \\ ax\,, & \lambda by\,, & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

of

$$H \equiv -\lambda^2(3x + \lambda y - 2a)\,b^2y^2 + 2\lambda(\lambda x + y)\,abxy - \\ - a^2x^2\,(x + 3\lambda y - 2\lambda b) = 0\,,$$

of

$$H \equiv - a^2x^3 + (2\lambda^2ab - 3\lambda a^2)\,x^2y + (2\lambda ab - 3\lambda^2b^2)\,xy^2 - \\ - \lambda^3b^2y^3 + 2\lambda^2ab^2y^2 + 2\lambda a^2bx^2 = 0.$$

Is nu $f = x\,(x^2 + y^2 - 2ax) + \lambda y\,(x^2 + y^2 - 2by) = 0$ de gegeven kromme, dan stellen $H = 0$ en $f = 0$ voor een bepaalde waarde van λ twee krommen voor, die elkaar in het dubbelpunt O_1 aanraken.

Alle krommen uit den bundel $H + \mu f = 0$ zullen dus dezelfde dubbelpuntsraaklijnen hebben. De kromme $H = 0$ snijdt $f = 0$ buiten O_1 in de drie buigpunten. Van de negen basispunten van den bundel zullen er zes in O_1 liggen en de drie overigen in de drie buigpunten van $f = 0$.

De drie buigpunten van een C^3 met dubbelpunt liggen op een rechte lijn l, die we door de vergelijking $px + qy + r = 0$ zullen voorstellen. Bepalen we nu een kromme uit den bundel $H + \mu f = 0$ door een punt S op de lijn l, dan zal deze kromme moeten ontaarden, omdat zij vier punten met l gemeen heeft. Zij zal ontaarden in $px + qy + r = 0$ en in een kromme C^2, die een dubbelpunt heeft in O_1 en in dat punt $f = 0$ aanraakt. De vergelijking van de ontaarde kromme moet dus zijn

$$(px + qy + r)\,(ax^2 + \lambda by^2) = 0.$$

Uit het feit, dat deze kromme behoort tot den bundel $H + \mu f = 0$, of

$$(-a^2 + \mu) x^3 + \lambda (2\lambda ab - 3a^2 + \mu) x^2 y + (2\lambda ab - 3\lambda^2 b^2 + \mu) xy^2 -$$
$$- \lambda(\lambda^2 b^2 - \mu) y^3 + 2 (\lambda ab - \mu)(ax^2 + \lambda by^2) = 0$$

kunnen we de voorwaarden vinden, waaraan p, q en r moeten voldoen, opdat $px + qy + r = 0$ de lijn door de buigpunten voorstelt; bovendien kunnen we de waarde van μ bepalen, waarvoor $H + \mu f = 0$ op bovenstaande wijze ontaardt. Deze voorwaarden zijn

$$- a^2 + \mu = ap, \quad 2\lambda ab - 3\lambda^2 b^2 + \mu = \lambda bp,$$
$$\lambda(2\lambda ab - 3a^2 + \mu) = aq, \quad -\lambda(\lambda^2 b^2 - \mu) = \lambda bq, \quad r = 2(\lambda ab - \mu).$$

Hieruit volgt

$$\frac{-a^2 - \mu}{2\lambda ab - 3a^2 + \mu} = \frac{3\lambda ab - 3\lambda^2 b^2 + \mu}{-\lambda^2 b^2 + \mu},$$

$$\lambda^2 a^2 b^2 - (a^2 + \lambda^2 b^2)\mu = (2\lambda ab - 3a^2)(2\lambda ab - 3\lambda^2 b^2) + (4\lambda ab - 3a^2 - 3b^2\lambda^2)\mu,$$

$$(2a^2 + 2\lambda^2 b^2 - 4\lambda ab)\mu = 12\lambda^2 a^2 b^2 - 6\lambda ab (a^2 + \lambda^2 b^2),$$

$$2(a - \lambda b)^2 \mu = - 6\lambda ab (a - \lambda b)^2,$$

en dus ten slotte

$$\mu = - 3\lambda ab,$$

waardoor we vinden

$$p = - \frac{a^2 - \mu}{a} = - (a + 3\lambda b),$$

$$q = - \frac{\lambda^2 b^2 - \mu}{b} = - \lambda^2 b - 3\lambda a = - \lambda(\lambda b + 3a),$$

$$r = 2(\lambda ab - \mu) = 8\lambda ab.$$

De vergelijking van de lijn door de drie buigpunten van een zelfde kromme wordt dus

$$(a + 3\lambda b) x + \lambda (3a + \lambda b) y - 8ab\lambda = 0.$$

Door nu uit deze vergelijking en haar afgeleide naar λ de λ te elimineeren bepaalt men de omhullende van de lijn door de drie buigpunten. De vergelijking van deze omhullende wordt

$$(3bx + 3ay - 8ab)^2 - 4abxy = 0;$$

dit is een kegelsnede die de x-as en y-as aanraakt in de punten $(\frac{8}{3} a, 0)$ en $(0, \frac{8}{3} b)$.

Asymptoot en raaklijn in A_1.

Voor de lijn, die door twee opeenvolgende punten (x_1, y_1) en $(x_1 + \triangle x_1, y_1 + \triangle y_1)$ van een kromme gaat, geldt de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_1 , & y_1 , & 1 \\ \triangle x_1 , & \triangle y_1 , & 0 \\ x , & y , & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Substitueeren we hierin de waarden $x_1 = \dfrac{2(a + \lambda bt^2)}{1 + \lambda t + t^2 + \lambda t^3}$ en $y_1 = \dfrac{2t(a + \lambda bt^2)}{1 + \lambda t + t^2 + \lambda t^3}$, dan vinden we als algemeene vergelijking van de raaklijn aan een kromme uit onzen bundel

$$\begin{vmatrix} 6a + 2\lambda bt^2 , & 4at , & 3 + 2\lambda t + t^2 \\ 4\lambda bt , & 2a + 6\lambda bt^2 , & \lambda + 2t + 3\lambda t^2 \\ x , & y , & 1 \end{vmatrix} = 0 \ldots (3).$$

Deze lijn is bepaald, zoodra t en daardoor het raakpunt gegeven is.

Uit $x = \dfrac{2(a + \lambda bt^2)}{(1 + \lambda t)(1 + t^2)}$, $y = \dfrac{2t(a + \lambda bt^2)}{(1 + \lambda t)(1 + t^2)}$ ziet men, dat de parameterwaarde van het bestaanbaar punt in het oneindige $t = -\dfrac{1}{\lambda}$ moet zijn. Om dus de vergelijking van de asymptoot te verkrijgen, dient men in (3) deze waarde van t in te voegen. Dit geeft

$$\begin{vmatrix} 6a\lambda^2 + 2b\lambda , & -4a\lambda , & \lambda^2 + 1 \\ -4b\lambda , & 2a\lambda + 6b , & \lambda^2 + 1 \\ x , & y , & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$\begin{vmatrix} 6a\lambda^2 + 2b\lambda , & -4a\lambda , & \lambda^2 + 1 \\ -(6a\lambda^2 + 6b\lambda), & 6a\lambda + 6b , & 0 \\ x , & y , & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6a\lambda + 2b , & -4a\lambda , & \lambda^2+1 \\ -(6a\lambda+6b), & 6(a\lambda+b) , & 0 \\ x , & \lambda y , & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$\begin{vmatrix} 2(a\lambda + b) , & -4a\lambda , & \lambda^2 + 1 \\ 0 , & a\lambda + b , & 0 \\ x + \lambda y , & \lambda y , & \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ d. i. } \begin{vmatrix} x + \lambda y , & \lambda \\ 2(a\lambda + b), & \lambda^2 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dus is de vergelijking van de asymptoot

$$\lambda^3 y + \lambda^2(x - 2a) + \lambda(y - 2b) + x = 0.$$

De omhullende van deze lijn verkrijgt men door λ te elimineeren uit deze vergelijking en haar afgeleide

$$3y\lambda^2 - 2(x - 2a)\lambda + y - 2b = 0$$

naar λ. Door de vergelijking der asymptoot met drie te vermenigvuldigen en van deze de met λ vermenigvuldigde nieuwe vergelijking af te trekken vindt men

$$(x - 2a)\lambda^2 + 2(y - 2b)\lambda + 3x = 0.$$

Elimineeren we nu λ uit de beide kwadratische vergelijkingen volgens de methode van SYLVESTER, dan vinden we voor de omhullende een kromme van den vierden graad voorgesteld door de vergelijking

$$\begin{vmatrix} 3y, & 2(x - 2a), & y - 2b, & 0 \\ x - 2a, & 2(y - 2b), & 3x, & 0 \\ 0, & 3y, & 2(x - 2a), & y - 2b \\ 0, & x - 2a, & 2(y - 2b), & 3x \end{vmatrix} = 0.$$

Reeds vroeger (pag. 8, sub ζ) hebben we gezien, dat de omhullende van de asymptoot van de derde klasse was. Ook hier blijkt dit uit de vergelijking $\lambda^3 y + \lambda^2(x - 2a) + \lambda(y - 2b) + x = 0$, die van den derden graad in λ is, waaruit volgt, dat drie krommen uit den bundel een asymptoot hebben gaande door een bepaald punt (x_1, y_1).

Bovendien kunnen we nog de tangentiëele vergelijking afleiden van de omhullende. Schrijft men

$$\lambda^3 y + \lambda^2(x - 2a) + \lambda(y - 2b) + x = 0$$

in den vorm

$$(\lambda^2 + 1)x + \lambda(\lambda^2 + 1)y - 2\lambda(\lambda a + b) = 0,$$

dan ziet men dadelijk, dat $ux + vy = 1$ een raaklijn aan de omhullende zal zijn, als

$$u = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda(\lambda a + b)}, \quad v = \frac{\lambda(\lambda^2 + 1)}{2\lambda(\lambda a + b)}$$

is. Elimineert men λ uit deze twee betrekkingen, dan vindt men als tangentiëele vergelijking

$$2uv(av + bu) = u^2 + v^2.$$

Deze vergelijking is van den derden graad in u en v; derhalve is de omhullende van de derde klasse.

Uit de PLÜCKER'sche vergelijking $m = n(n-1) - 2d - 3k$ volgt — in aanmerking genomen dat het aantal dubbelpunten (hetzij gewone of keerpunten) op zijn hoogst drie is —, dat een kromme van den vierden graad en van de derde klasse drie keerpunten moet hebben.

Even als een kromme van den derden graad met drie buigpunten één dubbelpunt heeft, zal een kromme van de derde klasse met drie keerpunten één dubbelraaklijn moeten hebben. Daar nu in de vergelijking $2uv(av + bu) = u^2 + v^2$ de bekende term en de termen van den eersten graad ontbreken, zal de lijn $u = 0$, $v = 0$ dubbelraaklijn aan de kromme zijn. De lijn in het oneindige is dus dubbelraaklijn. Geeft men een kromme met dubbelpunt in den oorsprong door haar vergelijking in puntcoördinaten, dan stellen de termen van den tweeden graad, gelijk nul gesteld, de dubbelpuntsraaklijnen voor. Zoo zal hier $u^2 + v^2 = 0$ de raakpunten op de dubbelraaklijn voorstellen; $u \pm iv = 0$ is de vergelijking van de beide onbestaanbare cirkelpunten, die dus de raakpunten zijn.

Bij de kromme van den derden graad met een dubbelpunt liggen de buigpunten op een rechte lijn. Bij een kromme van de derde klasse met een dubbelraaklijn gaan de drie keerraaklijnen door een punt; dit punt zullen we zoeken.

Een keerpunt is een punt op drie opeenvolgende raaklijnen; de voorwaarde, dat drie opeenvolgende raaklijnen door een zelfde punt gaan, is

$$\begin{vmatrix} u \; , & v \; , & 1 \\ \triangle u \; , & \triangle v \; , & 0 \\ \triangle^2 u \; , & \triangle^2 v \; , & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Evenals we vroeger x en y in een zelfde hulpveranderlijke t hebben uitgedrukt, zijn u en v hier rechtstreeks in λ gegeven. Substitueert men

$$u = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda(\lambda a + b)}, \quad v = \frac{\lambda^2 + 1}{2(\lambda a + b)}$$

in bovenstaande vergelijking, dan vindt men na eenige herleiding

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+1\ , & \lambda(\lambda^2+1)\ , & 2a\lambda^2+2b\lambda \\ 2\lambda\ , & 3\lambda^2+1\ , & 4a\lambda+2b \\ 2\ , & 6\lambda\ , & 4a \end{vmatrix} = 0,$$

of nog eenvoudiger

$$\begin{vmatrix} 1\ , & \lambda^3\ , & -a \\ \lambda\ , & 1\ , & b \\ 1\ , & 3\lambda\ , & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d.i.

$$b\lambda^3 - 3a\lambda^2 - 3b\lambda + a = 0.$$

Invoeging van een der wortels van deze derdemachtsvergelijking in λ in $u = \dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda(\lambda a + b)}$, $v = \dfrac{\lambda^2+1}{2(\lambda a+b)}$ geeft ons een der drie keerraaklijnen. Anders gezegd: de waarden van λ, die aan deze vergelijking voldoen, verschaffen ons uit den rechthoekigen bundel die krommen, wier asymptoot keerraaklijn is aan de omhullende van de asymptoot. Door λ is een kromme bepaald, door de kromme is de asymptoot gegeven en omgekeerd; elke asymptoot heeft dus haar λ. De algemeene betrekking, die er bestaat tusschen de drie waarden λ der asymptoten, welke door een willekeurig punt (x, y) gaan, is

$$\lambda^3 y + \lambda^2(x-2a) + \lambda(y-2b) + x = 0.$$

Kunnen we nu x en y zóó bepalen, dat deze betrekking overgaat in

$$b\lambda^3 - 3a\lambda^2 - 3b\lambda + a = 0,$$

dan hebben we het punt gevonden, waardoor de drie keerraaklijnen gaan. Dit geeft de voorwaarden

$$\frac{y}{b} = \frac{x-2a}{-3a} = \frac{y-2b}{-3b} = \frac{x}{a};$$

aan deze voorwaarden wordt voldaan door $x = \frac{1}{2}a$, $y = \frac{1}{2}b$. De drie keerraaklijnen gaan dus door het middelpunt van den negenpuntscirkel c_n. Om nu de drie keerraaklijnen door het punt N (fig. 5) te construeeren, zouden we door N en A_1 lijnen moeten trekken, die antiparallel zijn ten opzichte van O_2O_3 of O_1A_1 en elkaar snijden op c_n. Hier stuiten we op het verdeelen van den cirkelboog M_{23} R M_{12} in drie gelijke deelen; dus is de con-

structie onmogelijk. Stellen we ons voor, dat we R hadden gevonden door *bg* $M_{23}RM_{12}$, S door *bg* O_1SC en T door *bg* $M_{13}A_1M_{23}$ in drie gelijke deelen te verdeelen, dan kunnen we nog opmerken, dat de drie keerraaklijnen NR, NS en NT elkaar onder hoeken van 120° zullen snijden. Immers

$$\angle TNR = 180° - (\tfrac{1}{3}\, bg\, M_{13}A_1M_{23} + \tfrac{1}{3}\, bg\, M_{23}RM_{12}) =$$
$$= 180° - \tfrac{1}{3} \times 180° = 120°,$$
$$\angle SNR = 90° + (\tfrac{1}{3}\, bg\, M_{23}RM_{12} + \tfrac{1}{3}\, bg\, O_1SC) =$$
$$= 90° + \tfrac{1}{3} \times 90 = 120°.$$

De kromme is dus de bekende hypocycloïde van STEINER.

De meetkundige plaats van het snijpunt van een kromme met haar asymptoot vindt men door λ te elimineeren tusschen $\lambda^3 y + \lambda^2(x - 2a) + \lambda(y - 2b) + x = 0$ en $xA + \lambda yB = 0$, d. i. $x(x^2 + y^2 - 2ax) + \lambda y(x^2 + y^2 - 2by) = 0$. Voegen we in de eerste vergelijking voor λ de waarde $-\dfrac{xA}{yB}$ in, dan komt er

$$-\frac{x^3A^3}{y^3B^3}\,y + \frac{x^2A^2}{y^2B^2}(x - 2a) - \frac{xA}{yB}(y - 2b) + x = 0,$$

of

$$-x^3A^3y + x^2yBA^2(x - 2a) - xAy^2B^2(y - 2b) + xy^3B^3 = 0,$$

of

$$-x^2A^3 + x^2A^2B - 2axA^2B + 2byAB^2 - y^2AB^2 + y^2B^3 = 0,$$

of

$$x^2A^2(B - A) - 2axA^2B + 2byAB^2 + y^2B^2(B - A) = 0,$$

of

$$x^2A^2(2ax - 2by) - 2axA^2(x^2 + y^2 - 2by) + 2byB^2(x^2 + y^2 - 2ax) +$$
$$+ y^2B^2(2ax - 2by) = 0,$$

of

$$-2bx^2yA^2 - 2axy^2A^2 + 4abxyA^2 + 2byx^2B^2 - 4abxyB^2 + 2axy^2B^2 = 0,$$

d.i.

$$x = 0,\ y = 0,\ 2bx(B^2 - A^2) + 2ay(B^2 - A^2) - 4ab(B^2 - A^2) = 0,$$

of

$$2(bx + ay - 2ab)(B - A)(B + A) = 0.$$

Rechte lijnen, die tot de meetkundige plaats behooren, zijn dus $x = 0$, $y = 0$, $bx + ay - 2ab = 0$, en $B - A = 0$, of $ax - by = 0$. Bovendien vinden we $A + B = 0$, of $x^2 + y^2 - ax - by = 0$, of

in anderen vorm $x(x-a)+y(y-b)=0$. Deze laatste vergelijking is die van den negenpuntscirkel.

Voor de algemeene vergelijking van de raaklijn hebben we gevonden (pag. 15)

$$\begin{vmatrix} 6a+2\lambda bt^2, & 4at, & 3+2\lambda t+t^2 \\ 4\lambda bt, & 2a+6\lambda bt^2, & \lambda+2t+3\lambda t^2 \\ x, & y, & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; (3).$$

De parameterwaarde van het punt A_1 is $t=\frac{a}{b}$; we voegen deze waarde in (3) in en vermenigvuldigen met b^2. Dan komt er achtereenvolgens

$$\begin{vmatrix} 6ab^2+2\lambda a^2b, & 4a^2b, & 3b^2+2\lambda ab+a^2 \\ 4\lambda ab^2, & 2ab^2+6\lambda a^2b, & \lambda b^2+2ab+3\lambda a^2 \\ x, & y, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 6b+2\lambda a, & 4a, & 3b^2+2\lambda ab+a^2 \\ 4\lambda b, & 2b+6\lambda a, & \lambda b^2+2ab+3\lambda a^2 \\ x, & y, & ab \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 6b+2\lambda a, & 4a, & 3b^2+2\lambda ab+a^2 \\ -2\lambda b-2\lambda^2 a, & 2b+2\lambda a), & -2\lambda b^2+2ab-2\lambda^2 ab+2\lambda a^2 \\ x, & y, & ab \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 6b+2\lambda a, & 4a, & 3(b^2-a^2)+2\lambda ab \\ -2\lambda(b+\lambda a), & 2(b+\lambda a, & -2\lambda b(b+\lambda a) \\ x, & y, & a(b-y) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 6b+2\lambda a, & 4a, & 3(b^2-a^2)+2\lambda ab \\ -\lambda, & 1, & -\lambda b \\ x, & y, & a(b-y) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2b, & 2a, & (b^2-a^2) \\ -\lambda, & 1, & -\lambda b \\ x, & y, & a(b-y) \end{vmatrix} = 0.$$

Deze laatste determinant uitwerkende vindt men voor de raaklijn in A_1

$$(b^2-a^2)x+2ab(y-b)+\lambda\{(a^2-b^2)y+2ab(x-a)\}=0.$$

Eliminatie van λ uit deze vergelijking en

$$x(x^2+y^2-2ax)+\lambda y(x^2+y^2-2by)=0,$$

of $Ax + \lambda By = 0$ geeft als vergelijking van de meetkundige plaats der snijpunten van de raaklijn in A_1 met de kromme

$$\{ (b^2 - a^2)\, x + 2ab\, (y - b) \}\, By = \{ (a^2 - b^2)\, y + 2ab\, (x - a) \}\, Ax,$$

of

$$(bx + ay - 2ab)\,(byB - axA) + (ayB + bxA)\,(by - ax) = 0,$$

of

$$(bx + ay - 2ab)\,(by - ax)\,(x^2 + y^2 - 2ax - 2by) + \\ + (bx + ay - 2ab)(by - ax)\,(x^2 + y^2) = 0,$$

of

$$(bx + ay - 2ab)\,(by - ax)\,(x^2 + y^2 - 2ax + x^2 + y^2 - 2by) = 0.$$

De meetkundige plaats bestaat dus uit

de rechte lijn $O_2O_3 \equiv bx + ay - 2ab = 0,$

„ „ „ $O_1A_1 \equiv by - ax = 0,$

en de negenpuntscirkel $x^2 + y^2 - 2ax + x^2 + y^2 - 2by \equiv A + B = 0.$

De negenpuntscirkel snijdt de krommen van den bundel in zes punten n.l. in O_1 (tweemaal), A_1, ω_1 en ω_2 en bovendien in een bewegelijk punt P. Door dit punt P gaan dus de raaklijn in A_1 en de asymptoot. Een andere wijze om aan te toonen, dat de asymptoot en de raaklijn in A_1 door hetzelfde punt van de kromme gaan, leidt men af uit de voorwaarde, waaraan drie punten moeten voldoen, opdat zij op een zelfde rechte lijn liggen.

Een rechte lijn $px + qy + r = 0$ snijdt de kromme in drie punten, waarvan de parameterwaarden voldoen aan de vergelijking

$$2p\,(a + \lambda bt^2) + 2q\,(at + \lambda bt^3) + r\,(1 + \lambda t + t^2 + \lambda t^3) = 0,$$

of

$$(2q\lambda b + r\lambda)\, t^3 + (2\lambda pb + r)\, t^2 + (2aq + r\lambda)\, t + (2ap + r) = 0.$$

De drie wortels t_1, t_2, t_3 van deze vergelijking geven de drie punten, die op de lijn $px + qy + r = 0$ liggen. Nu is, als men

$$t_1t_2t_3 = s_3,\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3 = s_2,\ t_1 + t_1 + t_3 = s_1$$

stelt,

$$s_3 = -\frac{2ap + r}{\lambda(2qb + r)},\ s_2 = \frac{2aq + r\lambda}{\lambda(2qb + r)},\ s_1 = -\frac{2p\lambda b + r}{\lambda(2qb + r)}.$$

Hieruit vinden we

$$\frac{\lambda b}{a} s_2 = 1 - \frac{\lambda}{a} (\lambda b s_3 - a s_1),$$

$$\lambda b s_2 = a - \lambda^2 b s_3 + a\lambda s_1,$$

$$\lambda b (s_2 + \lambda s_3) = a (1 + \lambda s_1).$$

De voorwaarde, dat drie punten in een rechte liggen, wordt dus

$$\lambda b \{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 + \lambda t_1 t_2 t_3\} = a\{1 + \lambda (t_1 + t_2 + t_3)\}.$$

Worden nu twee waarden t_1 en t_2 aan elkaar gelijk, dan wordt de rechte lijn raaklijn aan de kromme en is t_3 het tangentiaalpunt van t_1 $(= t_2)$.

De parameterwaarde van het tangentiaalpunt van het bestaanbaar punt in het oneindige $\left(t = -\frac{1}{\lambda}\right)$ vinden we dus uit

$$\lambda b \left\{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} t + \lambda \frac{1}{\lambda^2} t\right\} = a \left\{1 + \lambda \left(-\frac{2}{\lambda} + t\right)\right\},$$

of

$$a\lambda^2 t + b\lambda t = a\lambda + b.$$

Dus is

$$t = \frac{a\lambda + b}{\lambda (a\lambda + b)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Op dezelfde wijs vinden we voor het tangentiaalpunt van $A_1 \left(t = \frac{a}{b}\right)$ weer

$$\lambda b \left\{\frac{a^2}{b^2} + 2 \frac{a}{b} t + \lambda \frac{a^2}{b^2} t\right\} = a \left\{1 + \lambda\left(2 \frac{a}{b} + t\right)\right\},$$

of

$$t = \frac{1}{\lambda}.$$

Wij zien dus, dat A_1 en het bestaanbaar punt in het oneindige hetzelfde tangentiaalpunt hebben. De raaklijn in A_1 en de asymptoot snijden elkaar dus op de kromme in het punt $t = \frac{1}{\lambda}$.

Om nu nog de meetkundige plaats van de genoemde tangentiaalpunten te verkrijgen, moeten we λ elimineeren uit

$$y = tx \text{ of } y = \frac{x}{\lambda} \text{ en } x\text{A} + \lambda y \text{B} = 0;$$

dit geeft

$$xA + \frac{x}{y} yB = 0, \text{ of } A + B = 0,$$

of

$$x^2 + y^2 - 2ax + x^2 + y^2 - 2by = 0 \text{ (negenpuntscirkel).}$$

Brandpunten.

a. *Het afzonderlijke brandpunt* is het snijpunt van de raaklijnen in ω_1 en ω_2.

Voor de vergelijking van de raaklijn in een punt t hebben we gevonden

$$\begin{vmatrix} 6a + 2\lambda bt^2, & 4at, & 3 + 2\lambda t + t^2 \\ 4\lambda bt, & 2a + 6\lambda bt^2, & \lambda + 2t + 3\lambda t^2 \\ x, & y, & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . . (3)$$

De parameterwaarden van de punten ω_1 en ω_2 zijn, zoo als uit $x = \frac{2(a + \lambda bt^2)}{(1 + t^2)(1 + \lambda t)}$ en $y = \frac{2t(a + \lambda bt^2)}{(1 + t^2)(1 + \lambda t)}$ blijkt, $t = + i$ en $t = - i$.

Voegen we nu i voor t in (3) in, dan vinden we voor de raaklijn in ω_1 achtereenvolgens

$$\begin{vmatrix} 6a - 2\lambda b, & 4ai, & 2 + 2\lambda i \\ 4\lambda bi, & 2a - 6\lambda b, & + 2i - 2\lambda \\ x, & y, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3a - \lambda b, & 2ai, & 1 + \lambda i \\ - 3ai + 3\lambda bi, & 3a - 3\lambda b, & 0 \\ x, & y, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3a - \lambda b, & 2ai, & 1 + \lambda i \\ - i, & 1, & 0 \\ x, & y, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$x(- 1 - i\lambda) + (- i + \lambda) y + a - \lambda b = 0.$$

Eveneens vinden we $x(-1+i\lambda)+(i+\lambda)y+a-\lambda b=0$ voor de raaklijn in ω_2.

Lossen we uit deze beide vergelijkingen de x en y op, dan vinden we voor de coördinaten van het afzonderlijk brandpunt F

$$x=\frac{a-\lambda b}{1+\lambda^2},\ y=-\frac{\lambda(a-\lambda b)}{1+\lambda^2}.$$

Substitueeren we deze waarden voor x en y in de vergelijking $x(x-a)+y(y-b)=0$ van den negenpuntscirkel, dan wordt het eerste lid identiek nul; dus ligt het punt F op den negenpuntscirkel.

De raaklijn in A_1 voorgesteld door

$$(b^2-a^2)x+2ab(y-b)+\lambda\{(a^2-b^2)y+2ab(x-a)\}=0$$

(zie p. 20) heeft tot richtingscoëfficiënt

$$-\frac{(b^2-a^2)+2ab\lambda}{\lambda(a^2-b^2)+2ab},$$

terwijl de coördinaten van A_1 door $\frac{2ab^2}{a^2+b^2}$, $\frac{2a^2b}{a^2+b^2}$ en die van F door $\frac{a-\lambda b}{1+\lambda^2}$, $-\frac{\lambda(a-\lambda b)}{1+\lambda^2}$ zijn voorgesteld. Dus is de vergelijking van de lijn A_1F

$$\frac{x-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}}{\frac{a-\lambda b}{1+\lambda^2}-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}}=\frac{y-\frac{2a^2b}{a^2+b^2}}{-\frac{\lambda(a-\lambda b)}{1+\lambda^2}-\frac{2a^2b}{a^2+b^2}}$$

en vindt men voor de richtingscoëfficiënt van deze lijn bij verdere uitwerking

$$\frac{\lambda(a^2-b^2)+2ab}{(b^2-a^2)+2ab\lambda};$$

hieruit blijkt dus, dat de raaklijn in A_1 en de lijn A_1F loodrecht op elkaar staan, of m.a.w. het afzonderlijk brandpunt ligt op den negenpuntscirkel diametraal tegenover het tangentiaalpunt van A_1 of van het bestaanbaar punt in het oneindige.

β. *De gewone brandpunten* zijn de snijpunten der raaklijnen, die men uit ω_1 en ω_2 aan de kromme C_i^3 kan trekken.

Alle lijnen door ω_2 kunnen we voorstellen door de vergelijking $y+ix=r$, die door ω_1 door de vergelijking $y-ix=r$.

Voor welke waarden van r zal nu een dezer lijnen raaklijn zijn aan C^3?

Om dit nader te onderzoeken substitueeren we

$$\frac{2(a+\lambda bt^2)}{(1+t^2)(1+\lambda t)} \text{ en } \frac{2t(a+\lambda bt^2)}{(1+t^2)(1+\lambda t)}$$

voor x en y in $y+ix=r$; dit geeft een derdemachtsvergelijking in t, waarvan de wortels ons de parameterwaarden der drie snijpunten van $y+ix=r$ en C^3 verschaffen; een dier wortels zal natuurlijk $t=-i$ zijn. We vinden

$$t(2a+2\lambda bt^2)+i(2a+2\lambda bt^2)=r(1+t^2)(1+\lambda t),$$

of

$$(t+i)(2a+2\lambda bt^2)=r(1+t_2)(1+\lambda t),$$

of

$$2a+2\lambda bt^2=r(1-it)(1+\lambda t),\ \ldots\ (t+i=0),$$

of met voorbijgang van $t=-i$

$$(2\lambda b-r\lambda)t^2-(r-ir\lambda)t+(2a+ir)=0.$$

Opdat $y+ix=r$ nu raaklijn zij aan C^3, zal deze vierkantsvergelijking in t twee gelijke wortels moeten hebben; voorwaarde hiervoor is

$$r^2(1-i\lambda)^2=4(2a+ir)(2\lambda b-\lambda r),$$

of

$$r^2(1+i\lambda)^2+8\lambda(a-bi)r=16ab\lambda.$$

Elimineeren we nu de r uit deze vergelijking en $y+ix=r$, dan krijgen we de twee raaklijnen in ω_2. Op dezelfde wijs kunnen we handelen met $y-ix=r$. De vier brandpunten worden dus bepaald door de volgende vergelijkingen

$$(1+i\lambda)^2(y^2-x^2+2ixy)+8\lambda(a-bi)(y+ix)=16ab\lambda,$$
$$(1-i\lambda)^2(y^2-x^2-2ixy)+8\lambda(a+bi)(y-ix)=16ab\lambda,$$

of in anderen vorm gebracht

$$(y^2-x^2)(1-\lambda^2)-4\lambda xy+8a\lambda y+8b\lambda x-16ab\lambda+$$
$$+i\{2\lambda y^2-2\lambda x^2+2(1-\lambda^2)xy+8\lambda(ax-by)\}=0,$$

$$(y^2-x^2)(1-\lambda^2)-4\lambda xy+8a\lambda y+8b\lambda x-16ab\lambda-$$
$$-i\{2\lambda y^2-2\lambda x^2+2(1-\lambda^2)xy+8\lambda(ax-by)\}=0.$$

Aan deze beide vergelijkingen zal worden voldaan door die waarden van x en y, welke voldoen aan

$$(y^2 - x^2)(1 - \lambda^2) - 4\lambda xy + 8a\lambda y + 8b\lambda x - 16ab\lambda = 0 \quad \ldots (4),$$

$$2\lambda y^2 - 2\lambda x^2 + 2(1 - \lambda^2)xy + 8\lambda(ax - by) = 0 \quad \ldots (5).$$

Lossen we dus uit deze beide laatste vergelijkingen x en y op, dan vinden we de coördinaten der vier brandpunten.

We brengen (4) en (5) eerst in den vorm

$$-(1-\lambda^2)(x^2+y^2-4by)+(-2y+4b)[2\lambda x-(1-\lambda^2)y-4a\lambda]=0,$$

$$\lambda(x^2+y^2-4by) - x[2\lambda x - (1-\lambda^2)y - 4a\lambda] = 0$$

en zien, dat aan beide vergelijkingen wordt voldaan, zoodra $x^2 + y^2 - 4by = 0$ en $2\lambda x - (1 - \lambda^2)y - 4a\lambda = 0$ is.

Vervolgens nemen we (4) en (5) in den vorm

$$(1-\lambda^2)(x^2+y^2-4ax) - (2x-4a)[(1-\lambda^2)x + 2\lambda y - 4\lambda b] = 0,$$

$$-\lambda(x^2+y^2-4ax) + 4y[(1-\lambda^2)x^2 + 2\lambda y - 4\lambda b] = 0;$$

dan zien we, dat aan beide vergelijkingen ook wordt voldaan, zoodra $x^2 + y^2 - 4ax = 0$ en $(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y - 4\lambda b = 0$ is.

Noemen we nu de brandpunten f_1, f_2, f_3, f_4, dan vindt men dat f_1 en f_2 de snijpunten kunnen zijn van den cirkel voorgesteld door $x^2 + y^2 - 4by = 0$ met O_3 tot middelpunt en O_1O_3 tot straal en de door O_2 gaande rechte lijn $2\lambda x - (1 - \lambda^2)y - 4a\lambda = 0$, terwijl f_3 en f_4 dan liggen op den cirkel $x^2 + y^2 - 4ax = 0$ met O_2 tot middelpunt en O_1O_2 tot straal en de door O_3 gaande lijn $(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y - 4\lambda b = 0$.

De richtingscoëfficiënten der lijnen f_1f_2 en f_3f_4 zijn $\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$ en $-\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$; derhalve staan deze lijnen loodrecht op elkaar.

Als de brandpunten f_1 en f_2 bestaanbaar zijn, zullen f_3 en f_4 onbestaanbaar zijn, zooals op de volgende wijs analytisch blijkt. De coördinaten van f_1 en f_2 voldoen aan de vergelijkingen $x^2 + y^2 - 4bx = 0$ en $2\lambda x - (1 - \lambda^2)y - 4a\lambda = 0$. Drukken we x met behulp van de laatste vergelijking in y uit en substitueeren we die waarde in de eerste vergelijking, dan ontstaat de vierkantsvergelijking

$$(1 + \lambda^2)^2 y^2 + 8\lambda\{(1 - \lambda^2)a - 2\lambda b\}y + 16a^2\lambda^2 = 0.$$

De wortels van y zijn bestaanbaar en dus ook de punten f_1 en f_2, als

$$16\lambda^2\{(1-\lambda^2)a - 2\lambda b\}^2 > 16a^2\lambda^2(1+\lambda^2)^2$$

is, of vereenvoudigd, onder de voorwaarde

$$\lambda(b+\lambda a)(\lambda b - a) > 0.$$

Op dezelfde wijze vindt men voor het bestaanbaar zijn van f_3 en f_4 de voorwaarde

$$\lambda(b+\lambda a)(\lambda b - a) < 0.$$

Vervangen we λ in $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y - 4\lambda b = 0$ door $-\dfrac{1}{\lambda}$, dan gaat deze vergelijking na vermenigvuldiging met λ^2 in zich zelf over. Evenzoo de vergelijking $2\lambda x - (1-\lambda^2)y - 4a\lambda = 0$. Hieruit blijkt, dat de krommen

$$x(x^2+y^2-2ax) + \lambda y(x^2+y^2-2by) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

en

$$\lambda x(x^2+y^2-2ax) - y(x^2+y^2-2by) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

dezelfde brandpunten hebben en dus confocaal zijn.

De raaklijnen in O_1 aan (6) worden voorgesteld door

$$ax^2 + \lambda by^2 = 0, \text{ of } \frac{y}{x} = \pm\sqrt{-\frac{a}{\lambda b}};$$

eveneens de raaklijnen in O_1 aan (7) door

$$\lambda ax^2 - by^2 = 0, \text{ of } \frac{y}{x} = \pm\sqrt{+\frac{\lambda a}{b}}.$$

Derhalve zal de confocale van een kromme met knooppunt een kromme met een geïsoleerd punt zijn en omgekeerd.

We zullen nu nog de raaklijn in de punten O_2, O_3 en A_1 bepalen, om te zien onder welke hoeken twee krommen elkaar in die punten snijden. Uit de betrekkingen

$$x = \frac{2(a+\lambda bt^2)}{1+\lambda t+t^2+\lambda t^3},\; y = \frac{2t(a+\lambda bt^2)}{1+\lambda t+t^2+\lambda t^3}$$

volgt, dat de parameterwaarde van het punt O_2 $(x=2a,\ y=0)$ zal zijn $t=0$, die van het punt O_3 $(x=0,\ y=2b)$ daarentegen $t=\infty$.

De vergelijking der raaklijn in O_2 verkrijgt men door $t=0$ te stellen in de op pag. 15 gevonden vergelijking (3). Zij is dus

$$\begin{vmatrix} 2a\,, & 0\,, & 1 \\ 0\,, & 2a\,, & \lambda \\ x\,, & y\,, & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ of } x+\lambda y = 2a.$$

Stelt men op dezelfde wijze in den determinant $t=\infty$, dan verkrijgt men de vergelijking der raaklijn in O_3 in den vorm

$$\begin{vmatrix} 2\lambda b\,, & 0\,, & 1 \\ 0\,, & 2\lambda b\,, & \lambda \\ x\,, & y\,, & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ of } x+\lambda y = 2\lambda b.$$

Wij hebben nu dus gevonden voor de vergelijkingen der

raaklijn in O_2 . . . . $x+\lambda y = 2a$,
" in O_3 . . . . $x+\lambda y = 2\lambda b$,
asymptoot . . . $\lambda^3 y + \lambda^2(x-2a) + \lambda(y-2b) + x = 0$.

Deze drie lijnen loopen evenwijdig, omdat de richtingscoëfficiënt bij alle $-\dfrac{1}{\lambda}$ is. Verder heeft de raaklijn in A_1 tot vergelijking

$$(b^2-a^2)\,x + 2ab\,(y-b) + \lambda\{(a^2-b^2)\,y + 2ab\,(x-a)\} = 0;$$

dus is haar richtingscoëfficiënt $-\dfrac{(b^2-a^2)+2a\lambda}{\lambda(a^2-b^2)+2ab}$, terwijl die van de lijn A_1O_1 klaarblijkelijk $\dfrac{a}{b}$ is. Zijn V_1 en V_2 de hoeken, die de raaklijnen in O_2 (of O_3) en in A_1 met O_1A_1 maken, dan is dus

$$\text{tg } V_1 = \frac{a\lambda+b}{b\lambda-a}, \quad \text{tg } V_2 = \frac{a\lambda+b}{a-\lambda b}.$$

Derhalve zijn de raaklijnen in A_1 en in O_2 (of O_3) antiparallel met betrekking tot O_1A_1 of O_2O_3. Twee willekeurige krommen uit den bundel snijden elkaar in O_2, O_3 en A_1 onder gelijke hoeken.

Twee confocale krommen C_i en C_i' snijden elkaar in die drie punten rechthoekig. Immers de richtingscoëfficiënten der raaklijnen in de genoemde punten aan deze krommen zijn door $-\dfrac{1}{\lambda_i}$

en $-\frac{1}{\lambda_i'}$ voorgesteld; zijn de krommen nu confocaal, dan is $\lambda_i = -\frac{1}{\lambda_i}$ en daaruit volgt, dat het product van $\frac{1}{\lambda_i}$ en $-\frac{1}{\lambda_i'}$ gelijk -1 is.

Omdat twee confocale krommen elkaar in A_1 rechthoekig snijden, valt het afzonderlijk brandpunt van C_i samen met het tangentiaalpunt van A_1 bij C_i'; de afzonderlijke brandpunten van C_i en C_i' liggen diametraal tegenover elkaar op c_n.

Voortbrenging der krommen.

Met behulp van de inversie hebben we afgeleid, dat elke kromme uit den bundel op twee wijzen de omhullende is van cirkels, die hun middelpunt hebben op een parabool en een vasten cirkel loodrecht snijden. We zullen nu trachten langs analytischen weg tot hetzelfde resultaat te komen.

We nemen de vergelijking van een kromme C^3 weer in den vorm

$$x(x^2+y^2-2ax)+\lambda y(x^2+y^2-2by)=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

en stellen door

$$x^2+y^2-2px-2qy+4s=0 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

den cirkel voor, die het punt (p, q) tot middelpunt en $r=\sqrt{p^2+q^2-4s}$ tot straal heeft.

Deze twee krommen zullen zes punten gemeen hebben; twee van deze liggen in het oneindige in de onbestaanbare cirkelpunten ω_1 en ω_2. De vier overigen kunnen we bepalen door de waarde van x^2+y^2 uit (8) in (1) te substitueeren, waardoor we vinden

$$x(2px+2qy-4s-2ax)+\lambda y(2px+2qy-4s-2by)=0,$$

of in anderen vorm

$$(p-a)x^2+\lambda(q-b)y^2+(q+\lambda p)xy-2sx-2\lambda sy=0 \quad . (9).$$

De coördinaten der vier snijpunten verkrijgt men door x en y op te lossen uit (8) en (9). Hierbij verschijnen deze vier punten dus als de snijpunten van een cirkel en een kegelsnede, m.a.w. als de basispunten van een bundel van kegelsneden, dien we kunnen voorstellen door de vergelijking

$$(p-a)x^2+\lambda(q-b)y^2+(q+\lambda p)xy-2sx-2\lambda sy+$$
$$+\mu(x^2+y^2-2px-2qy+4s)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

Als de snijpunten van (8) en (9) twee aan twee samenvallen, als dus de cirkel C^3 in twee punten aanraakt, zal (10) een bundel krommen voorstellen, waarvan de basispunten twee aan twee samenvallen. Hiervoor is noodig en voldoende, dat er in dien bundel een kromme voorkomt, die bestaat uit twee samengevallen rechte lijnen. Een kegelsnede zal ontaard zijn in twee samengevallen rechten, als er door een willekeurig punt P drie rechte lijnen gaan, die met de kegelsnede twee samengevallen snijpunten opleveren. Voor dit punt P kan men den oorsprong, voor de drie rechten kan men de lijnen $x = 0$, $y = 0$, $x = y$ aannemen. Voor $y=0$, $x=0$, $x=y$ gaat (10) achtereenvolgens over in

$$(p + \mu - a)\, x^2 - 2\,(\mu p + s)\, x + 4\mu s = 0,$$

$$(\lambda q + \mu - \lambda b)\, y^2 - 2\,(\mu q + \lambda s)\, y + 4\mu s = 0,$$

$$\{(p + \mu - a) + (\lambda q + \mu - \lambda b) + (q + \lambda q)\}\, x^2 - 2\,\{(\mu p + s) + \\ + (\mu q + \lambda s)\}\, x + 4\mu s = 0.$$

Hebben nu deze vergelijkingen van den tweeden graad alle drie twee gelijke wortels, dan zal in den bundel een in twee samengevallen rechten ontaarde kromme voorkomen. De voorwaarden hiervoor zijn

$$4\,\mu s(p + \mu - a) = (\mu p + s)^2,$$

$$4\mu(\lambda q + \mu - \lambda b) = (\mu q + \lambda s)^2,$$

$$\{(p + \mu - a) + (\lambda q + \mu - \lambda b) + (q + \lambda p)\}\, 4\mu s = \\ = \{(\mu p + s) + (\mu q + \lambda s)\}^2.$$

Voor de derde voorwaarde kan men in verband met de beide anderen ook

$$2\mu s\,(q + \lambda p) = (\mu p + s)\,(\mu q + \lambda s)$$

aannemen. Alles rangschikkend naar afdalende machten van μ vindt men

$$(p^2 - 4s)\,\mu^2 - (2ps - 4as)\,\mu + s^2 = 0,$$

$$(q^2 - 4s)\,\mu^2 - (2\lambda qs - 4\lambda bs)\,\mu + \lambda^2 s^2 = 0,$$

$$pq\mu^2 - s\,(\lambda p + q)\,\mu + \lambda s^2 = 0, \text{ of } (p\mu - s)\,(q\mu - \lambda s) = 0.$$

Elimineeren we nu μ uit deze drie vergelijkingen, dan vinden we de voorwaarden, waaraan p, q en s moeten voldoen, opdat de cirkel (8) dubbelrakend wordt aan (1). Deze eliminatie voert men het eenvoudigst uit door μ uit de derde vergelijking op te lossen en de verkregen waarde in de andere vergelijkingen in te

voegen; aangezien uit de derde vergelijking voor μ twee waarden volgen, zal men tweemaal twee voorwaarden vinden voor p, q en s.

Eerste geval. We hebben

$$p\mu - s = 0\,,\ \text{of}\ \mu = \frac{s}{p},$$

$$(p^2 - 4s)\,\frac{s^2}{p^2} - (2ps - 4as)\,\frac{s}{p} + s^2 = 0\,,$$

$$(q^2 - 4s)\,\frac{s^2}{p^2} - (2\lambda qs - 4\lambda bs)\,\frac{s}{p} + \lambda^2 s^2 = 0.$$

Door verdere herleiding vindt men

$$- s + ap = 0\,,\ \lambda^2 p^2 + q^2 - 2\lambda pq - 4s + 4\lambda bp = 0,$$

of

$$- s + ap = 0\,,\ \lambda^2 p^2 + q^2 - 2\lambda pq - 4p\,(a - \lambda b) = 0,$$

Nu stelt

$$\lambda^2 p^2 + q^2 - 2\lambda pq - 4p\,(a - \lambda b) = 0$$

een parabool voor, die de y-as in O_1 aanraakt, terwijl $s - ap = 0$ of $p^2 + q^2 - r^2 - 4ap = 0$ aanduidt, dat de reeks van cirkels, waarvan de gevonden parabool de meetkundige plaats der middelpunten is, den cirkel $[O_2]$ met de vergelijking $x^2 + y^2 - 4ax = 0$ loodrecht snijden. Het vierkant van den afstand der middelpunten is n.l. steeds gelijk aan de som der vierkanten van de stralen.

Tweede geval. Hier is op overeenkomstige wijs

$$q\mu - \lambda s = 0\,,\ \text{of}\ \mu = \frac{\lambda s}{q},$$

$$(q^2 - 4s)\,\frac{\lambda^2 s^2}{q^2} - (2\lambda qs - 4\lambda bs)\frac{\lambda s}{q} + \lambda^2 s^2 = 0\,,$$

$$(p^2 - 4s)\,\frac{\lambda^2 s^2}{q^2} - (2ps - 4as)\,\frac{\lambda s}{q} + s^2 = 0.$$

Door verdere herleiding vindt men

$$- s + bq = 0\,,\ \lambda^2 p^2 + q^2 - 2\lambda pq - 4\lambda^2 s + 4a\lambda q = 0,$$

of

$$- s + bq = 0,\ \lambda^2 p^2 + q^2 - 2\lambda pq + 4\lambda q\,(a - \lambda b) = 0.$$

De kromme $\lambda^2p^2 + q^2 - 2\lambda pq + 4\lambda q\,(a - \lambda b) = 0$ is een parabool, die in O_1 de x-as raakt, en $s - bq = 0$ of $p^2+q^2-r^2-4bq=0$ duidt aan, dat deze tweede reeks van cirkels den cirkel $[O_3]$ met de vergelijking $x^2 + y^2 - 4by = 0$ loodrecht snijden.

We hebben dus gevonden, dat er twee reeksen van cirkels zijn, die C^3 in twee punten aanraken; de cirkels der eerste reeks hebben hun middelpunten op een parabool p_2, die de y-as aanraakt in O_1, en snijden den cirkel $[O_2]$ loodrecht. De cirkels der tweede reeks hebben hun middelpunten op een parabool p_3, die de x-as aanraakt in O_1, en snijden den cirkel $[O_3]$ loodrecht.

We onderzoeken verder de beide deferenten p_2 en p_3, voorgesteld door de vergelijkingen

$$p_2 \equiv \lambda^2x^2 - 2\lambda xy^2 + y^2 - 4x\,(a-\lambda b) = 0,$$

$$p_3 \equiv \lambda^2x^2 - 2\lambda xy + y^2 + 4\lambda y\,(a - \lambda b) = 0.$$

De richting naar het oneindig ver gelegen punt, d. i. de richting van de as, is bij p_2 en p_3 beide bepaald door $-\lambda x + y = 0$, of $y = \lambda x$. De assen loopen derhalve evenwijdig.

Laat men uit O_1 een loodlijn neer op de as, dan vindt men als tweede snijpunt met p_2 en p_3 hetzelfde punt

$$x = \frac{4\lambda^2\,(a - \lambda b)}{(\lambda^2 + 1)^2}\,,\; y = -\frac{4\lambda\,(a - \lambda b)}{(\lambda^2 + 1)^2}.$$

Hieruit blijkt, dat de assen samenvallen. De vergelijking van de gemeenschappelijke as wordt

$$y + \frac{2\lambda\,(a - \lambda b)}{(\lambda^2 + 1)^2} = \lambda\left\{x - \frac{2\lambda^2\,(a - \lambda b)}{(\lambda^2 + 1)^2}\right\},$$

of

$$y - \lambda x + \frac{2\lambda\,(a - \lambda b)}{\lambda^2 + 1} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (11).$$

Het brandpunt van een parabool ligt op een lijn door een willekeurig punt der kromme antiparallel aan de richting der as met betrekking tot de raaklijn in dat willekeurig punt. Het brandpunt van beide deferenten moet dus liggen op de lijn

$$y = -\lambda x \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (12).$$

De parabolen zijn dus confocaal.

De coördinaten van het brandpunt vindt men uit (11) en (12); ze zijn

$$x = \frac{a - \lambda b}{\lambda^2 + 1}, \quad y = -\frac{\lambda(a - \lambda b)}{\lambda^2 + 1}.$$

Dit punt ligt op den negenpuntscirkel, waarvan de vergelijking $x(x-a) + y(y-b) = 0$ is (zie pag. 20), en valt samen met het afzonderlijk brandpunt van C^3 (zie pag. 24).

De gewone brandpunten van C^3 vindt men hier als snijpunten van de deferenten met de bij deze behoorende richtcirkels; het zijn de puntcirkels, die de kromme in twee punten aanraken.

De snijpunten van

$$y^2 + (x - 2a)^2 = 4a^2 \text{ en } \lambda^2 x^2 - 2\lambda xy + y^2 - 4x(a - \lambda b) = 0,$$

die niet in den oorsprong liggen, zijn dezelfde als die van $y^2 + (x - 2a)^2 = 4a^2$ met de rechte lijn $(\lambda^2 - 1)x - 2\lambda(y - 2b) = 0$.

Voor de twee andere brandpunten vindt men op dezelfde wijs de snijpunten van

$$x^2 + (y - 2b)^2 = 4b^2 \text{ en } (\lambda^2 - 1)y + 2\lambda(x - 2a) = 0.$$

Even als vroeger zien we dus, dat twee brandpunten liggen op $[O_2]$ en een rechte door O_3, de twee andere op $[O_3]$ en een rechte door O_2.

Richtlijnen.

Een richtlijn is de verbindingslijn van twee punten, waarin een kromme door een zelfden puntcirkel wordt aangeraakt. Uit bovenstaande afleiding van dubbelrakende cirkels ziet men gemakkelijk, dat de verbindingslijn der raakpunten van een dubbelrakenden cirkel moet samenvallen met de in twee samenvallende lijnen ontaarde kromme uit den bundel (10) (pag. 29).

Om derhalve de richtlijnen te verkrijgen, die bij de brandpunten f_1 en f_2 op den cirkel $[O_2]$ behooren, hebben we (zie het eerste geval op pag. 31) μ te bepalen in a, b, λ uit de volgende vergelijkingen

$$\mu = \frac{s}{p}, (p - 2a)^2 + q^2 = 4a^2, (\lambda^2 - 1)p - 2\lambda(q - 2b) = 0, 4s = p^2 + q^2,$$

waarvan de tweede in (p, q) als (x, y) cirkel $[O_2]$ voorstelt, de derde uit deze en de vergelijking van den deferent ontstaat en de vierde aanduidt, dat de straal des epicykels nul is.

Derhalve wordt $\mu = \frac{p^2 + q^2}{4p}$, terwijl p en q dan moeten worden opgelost uit de tweede en derde vergelijking.

Uit de tweede vergelijking volgt $\frac{p^2 + q^2}{4p} = a$. Dus is $\mu = a$. Voegen we deze waarde van μ in de vergelijking (10) in, dan gaat deze over in

$$(p - a)\,x^2 + \lambda\,(q - b)\,y^2 + (q + \lambda p)\,xy - 2sx - 2\lambda sy +$$
$$+ a\,(x^2 + y^2 - 2px - 2qy + 4s) = 0,$$

of

$$px^2 + \{\lambda q - (\lambda b - a)\}y^2 + (q + \lambda p)\,xy - 2\,\frac{p^2 + q^2}{4}\,(x + \lambda y) - 2apx -$$
$$- 2aqy + 4a\,(p^2 + q^2) = 0,$$

of

$$4p^2x^2 + 4\{\lambda g - (\lambda b - a)\}py^2 + 4p\,(q + \lambda p)\,xy - 2p\,(p^2 + q^2)(x + \lambda y) -$$
$$- 8ap^2x - 8apqy + 16a^2p^2 = 0.$$

Neemt men echter de beide betrekkingen in p en q in aanmerking, dan gaat deze vergelijking over in

$$4p^2x^2 + (\lambda p + q)^2y^2 + 4p\,(\lambda p + q)\,xy - 8ap^2\lambda y - 8apqy -$$
$$- 16ap^2x + 16a^2p^2 = 0,$$

of

$$4p^2x^2 + (\lambda p + q)^2y^2 + 16a^2p^2 + 4p\,(\lambda p + q)\,xy - 16ap^2x -$$
$$- 8ap\,(\lambda p + q)\,y = 0,$$

of

$$[2px + (\lambda p + q)\,y - 4ap]^2 = 0.$$

De twee richtlijnen l_1 en l_2 hebben dus tot vergelijkingen

$$2p_1x + (\lambda p_1 + q_1)\,y - 4ap_1 = 0,\quad 2p_2x + (\lambda p_2 + q_2)\,y - 4ap_2 = 0,$$

waarbij (p_1, q_1) en (p_2, q_2) de beide stellen van waarden zijn, die voldoen aan de vergelijkingen

$$p^2 + q^2 - 4ap = 0,\quad (\lambda^2 - 1)\,p - 2\lambda\,(q - 2b) = 0.$$

De richtlijnen l_1 en l_2 gaan beide door O_2 $(x = 2a,\ y = 0)$; zij staan loodrecht op de raaklijn aan de parabool P_1 in het brandpunt der C^3, waarbij ze behooren.

De richtingscoëfficiënt der raaklijn aan de parabool in het punt (p_1, q_1) is

$$-\frac{2\lambda^2 p_1 - 2\lambda q_1 + 4\lambda b - 4a}{2q_1 - 2\lambda p_1}$$

of, gebruik makende van de voorwaarden, waaraan p_1 en q_1 moeten voldoen, ook

$$-\frac{2\lambda^2 p_1 - 2\lambda q_1 + 4\lambda b - 4a}{2q_1 - 2\lambda p_1} = -\frac{(\lambda^2+1)p_1 - 4a}{2(q_1 - \lambda p_1)} = -$$

$$-\frac{(\lambda^2+1)p_1 - \dfrac{p_1{}^2 + q_1{}^2}{p_1}}{2(q_1 - \lambda p_1)} = \frac{q_1{}^2 - \lambda^2 p_1{}^2}{2p_1(q_1 - \lambda p_1)} = \frac{\lambda p_1 + q_1}{2p_1}.$$

Derhalve staat die raaklijn loodrecht op de lijn

$$2p_1 x + (\lambda p_1 + q_1)\, y - 4ap_1 = 0.$$

Om de richtlijnen te bepalen, die bij de brandpunten f_3 en f_4 op den richtcirkel $[O_3]$ behooren, hebben we μ te bepalen uit $\mu = \dfrac{\lambda s}{q}$, terwijl dan tusschen p, q en s de volgende betrekkingen bestaan

$$p^2 + (q - 2b)^2 = 4b^2,\ (\lambda^2 - 1)\, q + 2\lambda(p - 2a) = 0 \text{ en } 4s = p^2 + q^2.$$

Dan wordt $\mu = \lambda b$; deze waarde gesubstitueerd in (10) geeft

$$(p - a)\, x^2 + \lambda(q - b)\, y^2 + (q + \lambda p)\, xy - 2sx - 2\lambda sy +$$
$$+ \lambda b\,(x^2 + y^2 - 2px - 2qy + 4s) = 0.$$

Maakt men gebruik van de gegeven betrekkingen tusschen p en q, dan vindt men op overeenkomstige wijs

$$[2\lambda qy + (q + \lambda p)\, x - 4\lambda bq]^2 = 0.$$

Dus worden de vergelijkingen van de richtlijnen l_3 en l_4

$$(q_3 + \lambda p_3)\, x + 2\lambda q_3 y - 4\lambda b q_3 = 0,\ (q_4 + \lambda p_4)\, x + 2\lambda q_4 y - 4\lambda b q_4 = 0,$$

terwijl (p_3, q_3) en (p_4, q_4) weer de beide stellen van waarden zijn, die voldoen aan

$$p^2 + q^2 - 4bq = 0 \text{ en } (\lambda^2 - 1)\, q + 2\lambda(p - 2a) = 0.$$

Van de vier richtlijnen zullen er slechts twee bestaanbaar zijn, omdat er, zooals we hebben gezien, slechts twee brandpunten bestaanbaar zijn.

Bij de herleidingen op pag. 31 hebben we de vergelijkingen gedeeld door s en zoodoende den wortel $s = 0$ verdreven. Wij hebben dus het geval, dat de cirkels door O_1 gaan, buiten beschouwing gelaten. Om ook de door O_1 gaande cirkels nader te onderzoeken, zal men echter een anderen weg moeten inslaan; immers een cirkel, die door het dubbelpunt gaat, zal C^3 slechts

in twee bewegelijke punten snijden en het denkbeeld van een bundel, waarvan de basispunten de bewegelijke snijpunten zijn van een cirkel met C^3, gaat hier verloren.

Laat de cirkel $x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0$ gegeven zijn. Om de snijpunten van dezen cirkel met C^3 te vinden, voegen we de parameterwaarden

$$x = \frac{2(a + \lambda bt^2)}{(1 + t^2)(1 + \lambda t)}, \; y = \frac{2t(a + \lambda bt^2)}{(1 + t^2)(1 + \lambda t)}$$

(zie pag. 11) van een punt van C^3 in de vergelijking van den cirkel in. Dit geeft

$$\left[\frac{a + \lambda bt^2}{(1 + t^2)(1 + \lambda t)}\right]^2 + \left[\frac{t(a + \lambda bt^2)}{(1 + t^2)(1 + \lambda)}\right]^2 - p\,\frac{a + \lambda bt^2}{(1 + t^2)(1 + \lambda t)} -$$

$$- q\,\frac{t(a + \lambda bt)}{(1 + t^2)(1 + \lambda t)} = 0.$$

Voor de twee bewegelijke snijpunten vindt men dan

$$\frac{a + \lambda bt^2}{1 + \lambda t} - p - qt = 0,$$

of

$$(\lambda b - \lambda q)\,t^2 - (q + \lambda p)\,t - (p - a) = 0.$$

De cirkel zal C^3 raken, als deze vergelijking twee gelijke wortels heeft. De voorwaarde hiervoor is

$$4\,(p - a)(\lambda b - \lambda q) = (q + \lambda p)^2$$

of

$$\lambda^2 q^2 - 2\lambda pq + q^2 + 4\lambda\,(bp + aq) - 4\lambda ab = 0.$$

Deze vergelijking

$$(\lambda p - q)^2 + 4\lambda ab\left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} - 1\right) = 0$$

stelt weer een parabool p_1 voor. De richting van de as is bepaald door $q = \lambda p$; de parabool raakt de lijn $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} = 1$ aan in het punt R met de coördinaten $\left(\frac{ab}{\lambda a + b}, \frac{\lambda ab}{\lambda a + b}\right)$. De as loopt dus evenwijdig aan de gemeenschappelijke as van p_2 en p_3. Om te zien, of zij misschien met deze samenvalt, kan men de vergelijking der raakkoorde van het punt

$$\left(\frac{a-\lambda b}{\lambda^2+1}, -\frac{\lambda(a-\lambda b)}{\lambda^2+1}\right),$$

d. i. van het brandpunt F der parabolen p_2 en p_3, zoeken. Men vindt dan

$$x+\lambda y-\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}(a-\lambda b)=0.$$

Deze raakkoorde staat loodrecht op de as; dus is F een punt van de as en valt deze samen met die van p_2 en p_3.

Zal nu p_1 confocaal zijn met p_2 en p_3, dan moeten de as en de lijn FR antiparallel zijn ten opzichte van de lijn $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Stelt men de hoeken, die de as en FR met de raaklijn $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ maken, door V_1 en V_2 voor, dan vindt men vooreerst $\operatorname{tg} V_1=\frac{\lambda a+b}{a-\lambda b}$.

Nu is de vergelijking van FR

$$\frac{x-\frac{a-\lambda b}{\lambda^2+1}}{\frac{ab}{\lambda a+b}-\frac{a-\lambda b}{\lambda^2+1}}=\frac{y+\frac{\lambda(a-\lambda b)}{\lambda^2+1}}{\frac{\lambda ab}{\lambda a+b}+\frac{\lambda(a-\lambda b)}{\lambda^2+1}}$$

en dus de richtingscoëfficiënt van FR

$$\frac{2ab+\lambda a^2-\lambda b^2}{2\lambda ab-a^2+b^2}.$$

Hieruit volgt

$$\operatorname{tg} V_2=\frac{\frac{2ab+\lambda a^2-\lambda b^2}{2\lambda ab-a^2+b^2}+\frac{b}{a}}{1-\frac{b(2ab+\lambda a^2-\lambda b^2)}{a(2\lambda ab-a^2+b^2)}}=\frac{(\lambda a+b)(a^2+b^2)}{(\lambda b-a)(a^2+b^2)}=-\frac{\lambda a+b}{a-\lambda b}.$$

Het blijkt dus, dat die lijnen werkelijk antiparallel zijn ten opzichte van de raaklijn $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ en derhalve zijn de drie parabolen confocaal.

II. Krommennet van den vierden graad.

Ontstaan.

Een inversie I, waarvan een willekeurig punt P van het vlak van een circulaire C_0^3 van het geslacht nul het middelpunt is, doet deze C_0^3 overgaan in een bicirculaire C_0^4 van het geslacht nul, die door het punt P gaat.

Bovendien gaat door die inversie elk der beide richtcirkels $[O_2]$ en $[O_3]$ van C_0^3 over in een nieuwen cirkel, die de meetkundige plaats is van de dubbelpunten van een inversie I_i', ten opzichte van welke de bicirculaire C_0^4 anallagmatisch is [1])

Alvorens tot een verdere behandeling dezer krommen over te gaan, moet de vraag gesteld worden, of elke willekeurige bicirculaire kromme van den vierden graad en van het geslacht nul anallagmatisch is ten opzichte van twee inversies. Door een bicirculaire C_0^4 uit een punt Q van die kromme te inverteeren, gaat zij over in een circulaire C_0^3; zoodra we nu weten, dat elke willekeurige circulaire C_0^3 anallagmatisch is ten opzichte van twee inversies, blijkt — door de kromme weer terug te inverteeren —, dat ook elke bicirculaire C_0^4 dezelfde eigenschap bezit. Laat nu gegeven zijn een circulaire C_0^3 en op die kromme de punten O_2 en O_3, waar de beide raaklijnen uit het bestaanbaar punt in het oneindige (P_∞) de kromme aanraken. Deze raakpunten zijn altijd bestaanbaar, omdat door P_∞ een lijn gaat, die behalve P_∞ onbestaanbare snijpunten oplevert, n.l. l_∞. Vereenigt men nu O_2 met O_3 en beide punten met het dubbelpunt O_1, zoo ontstaat de driehoek $O_1O_2O_3$; op O_2O_3 zal nog een bestaanbaar punt van C_0^3 liggen, dat we A_1 noemen. Een inversie met O_2 als middelpunt, waarvan de cirkel met O_2O_1 als straal de meetkundige plaats van de dubbelpunten is, doet C_0^3 in zich zelf overgaan. De oorspronke-

[1]) Zie S. pag. 13, noot 22.

lijke C_0^3 en haar geïnverteerde $C_0'^3$ zullen dan de volgende punten gemeen hebben:

α) twee punten in O_2, want de raaklijn in O_2 blijft bestaan,

β) ω_1 en ω_2, want $C_0'^3$ blijft door de cirkelpunten gaan,

γ) vier punten in O_1,

δ) de punten R en S, die met O_1, ω_1 en ω_2 de snijpunten der kromme C_0^3 met den inversiecirkel vormen.

Dit zijn reeds tien punten; dus vallen de beide krommen van den derden graad geheel samen. Derhalve is elke circulaire C_0^3 anallagmatisch ten opzichte van twee inversies. Verder wordt de bijzondere vorm van den driehoek $O_1O_2O_3$ op de volgende wijze aangetoond. Aangezien O_3 en A_1 met O_2 op een zelfde lijn liggen, heeft men $\overline{O_1O_2}^2 = O_2A_1 \times O_2O_3$, derhalve is $\triangle\ O_2O_1O_3$ gelijkvormig met $\triangle\ O_2A_1O_1$, want zij hebben twee paar zijden evenredig en den ingesloten hoek gelijk; dus is $\angle\ O_2A_1O_1 = \angle\ O_2O_1O_3$. Neemt men nu verder O_3 als middelpunt van inversie, dan blijkt op dezelfde wijs, dat $\angle\ O_3A_1O_1 = \angle\ O_3O_1O_2$ is. Uit de twee laatste gelijkheden volgt $\angle\ O_2A_1O_1 = \angle\ O_3A_1O_1$ dus beide 90° en bovendien $\angle\ O_2O_1O_3 = 90°$.

Wij hebben dus de volgende stelling: De raakpunten op de raaklijnen, getrokken uit het bestaanbaar punt in het oneindige van een circulaire C_0^3 aan die kromme, vormen met het dubbelpunt de hoekpunten van een driehoek, die rechthoekig is in het dubbelpunt; het voetpunt van de loodlijn, uit het dubbelpunt op de schuine zijde neergelaten, is het derde snijpunt dier schuine zijde met de kromme C_0^3-

Inversie.

De bicirculaire krommen van den vierden graad van het geslacht nul, die anallagmatisch zijn ten opzichte van de inversies I_2 en I_3, waarvan de beide cirkels $[O_2]$ en $[O_3]$ met de middelpunten O_2 en O_3 de meetkundige plaatsen van de dubbelpunten zijn, vormen een net met drie dubbele basispunten O_1, ω_1, ω_2 (fig. 6); wijl het bij den rechthoekigen driehoek $O_1O_2O_3$ behoort noemen we het een *rechthoekig* net.

Deze krommen vormen een net, omdat één punt een bundel bepaalt. Neemt men namelijk in het vlak der beide cirkels $[O_2]$ en $[O_3]$ een punt P aan, dan zullen alle krommen C_0^4, die anallagmatisch zijn ten opzichte van de twee inversies en door P gaan, door een inversie met P als middelpunt overgaan in circulaire krommen C_0^3, die anallagmatisch zijn ten opzichte van twee nieuwe

inversies I_2' en I_3', waarvan twee nieuwe cirkels $[O_2']$ en $[O_3']$ de meetkundige plaatsen van de dubbelpunten zijn. Omgekeerd zal elk dier krommen C_0^3 door een reïnversie overgaan in een C_0^4. De krommen C_0^3 vormen een bundel, zooals vroeger is aangetoond; dus vormen de overeenkomstige bicirculaire C_0^4 eveneens een bundel. Terloops zij hier opgemerkt, dat O_2 en O_3 wel de middelpunten zijn van de geïnverteerden van $[O_2']$ en $[O_3']$, maar niet de geïnverteerden van de punten O_2' en O_3'; O_2 en O_3 liggen in het algemeen niet op de krommen C_0^4.

Elke C_0^4 van het rechthoekig net, die een vierde dubbelpunt heeft, splitst zich in twee deelen; de beide cirkels $[O_2]$ en $[O_3]$ vormen met de lijn l_∞ de meetkundige plaats van die dubbelpunten, dus de kromme van JACOBI. Tot het net van krommen C_0^4 behoort de bundel van krommen C_0^3, die bepaald is door den driehoek $O_1O_2O_3$, elke C_0^3 aangevuld door l_∞ tot een C_0^4; hieruit volgt onmiddellijk, dat l_∞ behoort tot de kromme van JACOBI van het net.

Een willekeurige kromme van het net snijdt de beide cirkels $[O_2]$ en $[O_3]$ rechthoekig in twee punten; een uitzondering hierop maken de ontaarde krommen. Uit de formules van PLÜCKER volgt, dat een kromme uit het net van de zesde klasse is en vier dubbelraaklijnen bezit. Derhalve kunnen we door het punt O_2 zes raaklijnen trekken. Twee van deze raken de kromme aan in een punt op $[O_2]$; derhalve moeten er nog vier zijn, die haar elders aanraken. Uit het anallagmatisch zijn volgt, dat deze vier raaklijnen twee aan twee moeten samenvallen tot een dubbelraaklijn. Door elk der punten O_2 en O_3 gaan dus twee dubbelraaklijnen.

Een willekeurige bundel uit het net heeft zestien basispunten; tot deze zestien behoort elk der drie punten O_1, ω_1, ω_2 viermaal, zoodat er nog vier enkelvoudige basispunten overschieten. Deze vier punten liggen op een cirkel, die $[O_2]$ en $[O_3]$ loodrecht snijdt en bovendien twee aan twee op twee rechten door O_2 en O_3. Deze bijzondere ligging blijkt uit het anallagmatisch zijn der krommen en ook uit de volgende beschouwing. Denken we ons den krommenbundel ontstaan door inversie van een rechthoekigen bundel C_0^3 uit een punt P, dan zullen de geïnverteerden der basispunten O_2', O_3' en A_1 van den laatsten bundel met het punt P de basispunten vormen van den bundel C_0^4; O_2', O_3' en A_1 (fig. 1) liggen op een rechte lijn, die $[O_2']$ en $[O_3']$ loodrecht snijdt, derhalve zullen ze door inversie uit P met dit punt op een cirkel komen, die $[O_2]$ en $[O_3]$ loodrecht snijdt.

Tot de ontaarde krommen van een bundel, waarvan P_1, P_2, P_3 en P_4 de basispunten zijn, behooren, behalve de reeds bovengenoemde C_0^3 met de rechte lijn l_∞ vereenigd, de volgende paren van cirkels:

α) c_{12} door de punten O_1, P_1 en P_2 en c_{34} door de punten O_1, P_3 en P_4,
β) c_{13} „ „ „ O_1, P_1 en P_3 en c_{24} „ „ „ O_1, P_2 en P_4,
γ) c_{14} „ „ „ O_1, P_1 en P_4 en c_{23} „ „ „ O_1, P_2 en P_3.

Omdat ook deze krommen anallagmatisch zijn ten opzichte van O_2 en O_3, zal c_{12} door de inversie I_2 overgaan in c_{34}, terwijl beide cirkels door de inversie I_3 in zich zelf overgaan; zij moeten dus $[O_3]$ loodrecht snijden en derhalve in het punt O_1 de lijn O_2O_3 aanraken. Dit laatste blijkt ook uit de loodrechte snijding, aangezien $O_3P_1 \times O_3P_2 = O_3K_1 \times O_3K_2 = \overline{O_3O_1}^2$ is.

Op dezelfde wijze blijkt, dat c_{13} en c_{24} raken aan O_2O_1 in het punt O_1, terwijl c_{14} en c_{23} door beide inversies in elkaar overgaan en dus beide de punten O_1 en S_{23} moeten bevatten.

Zoodra een der vier basispunten bestaanbaar is, zijn ze dit alle vier; ze vormen op elke kromme een involutie van vier elementen, die tweemaal uit twee samengevallen punten bestaan; als namelijk een der basispunten op $[O_2]$ komt, dan vallen er in dit punt twee samen en de beide anderen zullen eveneens op denzelfden cirkel samenvallen. De krommen raken elkaar dan in die punten aan en de gemeenschappelijke raaklijnen gaan door O_2. Iets dergelijks gebeurt als een der basispunten op $[O_3]$ ligt.

Komt een der basispunten in S_{23}, dan vallen ze alle vier in dit punt samen en men verkrijgt een bundel van cirkelparen, die hun middelpunten hebben op O_2O_3. De paren van middelpunten vormen op O_2O_3 een involutie, waarvan O_2 en O_3 de dubbelpunten zijn; ieder der cirkels $[O_2]$ en $[O_3]$, *tweemaal* geteld, behoort dus tot het net en derhalve eenmaal tot de kromme van Jacobi.

Komt een der basispunten in O_1, dan vallen ze alle in dat punt samen; in dat geval vindt men een bundel van cirkelparen, die O_1O_3 of O_1O_2 aanraken in O_1. De middelpunten vormen dus een involutie op O_1O_2 of O_1O_3, waarvan O_1 en O_2 of O_1 en O_3 de dubbelpunten zijn. Men vindt dus ook hier, dat $[O_2]$ en $[O_3]$, tweemaal geteld, tot het net behooren.

Door het rechthoekige net van krommen C_0^4, behoorende bij den driehoek $O_1O_2O_3$, uit een punt P van het vlak van den driehoek te inverteeren, krijgt men een ander net, dat even willekeurig is als het eerste; de richtcirkels van het eerste net gaan weer in

twee elkaar loodrecht snijdende richtcirkels over. Neemt men nu het middelpunt van inversie op $[O_2]$, dan wordt de nieuwe richtcirkel $[O_2']$ een as van symmetrie; inverteert men uit het punt S_{23}, dan gaan beide richtcirkels in assen van symmetrie over, die elkaar rechthoekig snijden in het dubbelpunt. De vier basispunten van een bundel zullen dan de hoekpunten van een rechthoek vormen (fig. 7). De krommen krijgen een lemniscaatachtigen vorm en hebben tot vergelijking

$$(x^2+y^2)^2+ax^2+by^2=0.$$

Is $a=-b$ dan stelt de vergelijking een lemniscaat voor (*Wiskundige opgaven*, deel 7, vraagstuk 147).

De kromme C_0^3, die bij een bundel met twee symmetrie-assen behoort, ontaardt in de drie rechte lijnen l_∞, $O_1'P_1$ en $O_1'P_2$.

Wanneer men eindelijk het net gaat inverteeren uit het punt O_1, dan ontstaat er een net van kegelsneden, n.l. alle kegelsneden die twee zelfde lijnen tot symmetrie-assen hebben. De in twee rechte lijnen ontaarde kegelsneden van dit net zijn de geïnverteerden van de in twee cirkels ontaarde krommen van het oorspronkelijke net.

Voortbrenging.

Een bicirculaire C_0^4 van het net is op twee wijzen de omhullende van cirkels (epicykels), die een vasten cirkel (richtcirkel) loodrecht snijden en wier middelpunten liggen op een kromme van den tweeden graad (deferent). De twee richtcirkels zijn de elkaar loodrecht snijdende cirkels $[O_2]$ en $[O_3]$. De beide deferenten, die bij een zelfde kromme behooren, zijn confocaal.

Het eerste gedeelte van deze stelling kan men op dezelfde wijze aantoonen als dit bij de circulaire C_0^3 is geschied (pag. 3). Alleen zij hier opgemerkt, dat de deferenten in het algemeen krommen met een middelpunt zullen zijn, omdat er evenwijdige raaklijnen voorkomen. Een willekeurige lijn door O_2 snijdt immers C_0^4 in vier punten en geeft dus twee raaklijnen aan, die loodrecht op die willekeurige lijn staan.

Dat de beide deferenten confocaal zijn, volgt onmiddellijk uit de eigenschap, dat de afzonderlijke brandpunten van een kromme, die de omhullende is van cirkels, wier middelpunten liggen op een deferent en die een richtcirkel loodrecht snijden, samenvallen met de gewone brandpunten van dien deferent [1]).

---

[1]) Zie S. pag. 18, noot 32 en pag. 20, noot 35.

Op de volgende wijze heb ik een ander bewijs geleverd, dat ons dadelijk brengt tot de meetkundige plaats van brandpunten der deferenten, welke behooren bij een krommenbundel uit het net.

De deferenten, die behooren bij de verschillende krommen uit den bundel met de basispunten P_i (fig. 6), en wier epicykels den cirkel $[O_3]$ loodrecht snijden, zullen raken aan MU (MU deelt P_1P_2 loodrecht middendoor) en aan MV (MV deelt P_3P_4 loodrecht middendoor); bovendien raken ze aan O_1O_2 in het punt O_1. Beschouwt men nu O_1O_2 als twee samengevallen raaklijnen, dan vormen de bij een bundel behoorende deferenten een schaar. De deferenten, wier epicykels den cirkel $[O_2]$ loodrecht snijden, vormen op dezelfde wijze een schaar. Deze beide scharen zijn projectief verwant door middel van de krommen uit den bundel.

De meetkundige plaats der brandpunten van een schaar kegelsneden vormen een K^3, waarvan de overstaande hoekpunten der volledige vierzij, gevormd door de vier basisraaklijnen, paren van toegevoegde punten zijn; eveneens zijn ω_1 en ω_2 toegevoegde punten.

Deze K^3 is de meetkundige plaats der snijpunten van twee half-perspectieve straleninvoluties; de eene involutie wordt gevormd door de paren van raaklijnen uit ω_1 en de andere door de paren van raaklijnen uit ω_2 aan de kegelsneden der schaar getrokken [1]).

Stelt men de eerste schaar voor door ${}_3D_i$ en de tweede door ${}_2D_i$, de involuties gevormd door de paren van raaklijnen aan ${}_3D_i$ uit ω_1 en ω_2 door ${}_3I_1$ en ${}_3I_2$ en de involuties gevormd door de paren van raaklijnen aan ${}_2D_i$ uit ω_1 en ω_2 door ${}_2I_1$ en ${}_2I_2$, dan zullen ${}_3I_1$ en ${}_3I_2$ half-perspectivisch zijn en de kromme ${}_3K^3$ — en ${}_2I_1$ en ${}_2I_2$ op dezelfde wijze de kromme ${}_2K^3$ — voortbrengen. Bovendien zijn de involuties ${}_3I_1$ en ${}_2I_1$ projectief verwant door middel van de krommen der bovengenoemde scharen. Doch ${}_3I_1$ en ${}_2I_1$ hebben drie paar overeenkomstige stralen gemeen en zijn derhalve identisch. Ten eerste zullen de deferenten behoorende bij de kromme C_0^4, die ontaardt in den puntcirkel O_1 en den cirkel $[M]$, beide ontaarden in de punten O_1 en M; het stralenpaar ω_1O_1 en ω_1M uit ${}_3I_1$ valt dus samen met het overeenkomstige paar uit ${}_2I_1$. Verder komt er in den bundel, bepaald door de punten P_i, een kromme C_0^3 voor (aangevuld tot een C^4 door l_∞); deze kromme

[1]) Schröter, „Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung", pag. 16.

heeft tot deferenten twee parabolen (dit zijn uit de beide scharen van kegelsneden de krommen, die l_∞ aanraken), die confocaal zijn, zooals bij de circulaire C_0^3 is aangetoond. Noemt men het brandpunt dier parabolen F, dan vormen $\omega_1 F$ en l_∞ ook een paar van ${}_3I_1$, dat samenvalt met het overeenkomstig paar uit ${}_2I_1$.

Eindelijk zal blijken, dat $\omega_1 U$ en $\omega_1 V$ nog een dergelijk paar vormen. Beschouwt men namelijk de C_0^4, die ontaardt in de twee cirkels c_{12} (door O_1, P_1 en P_2) en c_{34} (door O_1, P_3 en P_4), dan is het duidelijk, dat ${}_3D_i$ ontaardt in de punten U en V, terwijl ${}_2D_i$ een kegelsnede is, waarvan U en V de brandpunten zijn. De epicykels namelijk, die deze C_0^4 voortbrengen en $[O_2]$ loodrecht snijden, zullen c_{12} inwendig en c_{34} uitwendig raken. Is V het middelpunt van c_{34} en r_{34} de straal, U het middelpunt van c_{12} en r_{12} de straal, dan is de afstand van de middelpunten μ_i der dubbelrakende cirkels c_i (straal ϱ_i) tot U $= r_{12} - \varrho_i$ en tot V $= r_{34} + \varrho_i$. De som dezer afstanden is constant, namelijk $r_{12} + r_{34}$. Derhalve liggen de punten μ_i op een kegelsnede, waarvan U en V de brandpunten zijn. Hieruit blijkt, dat de beide bovengenoemde overeenkomstige stralenparen samenvallen.

Op dezelfde wijze kan men aantoonen, dat de involuties ${}_3I_2$ en ${}_2I_2$ identisch zijn. Daaruit volgt niet alleen, dat de krommen ${}_3K^3$ en ${}_2K^3$ samenvallen, maar ook dat twee overeenkomstige deferenten uit de beide projectief verwante scharen confocaal zijn.

De kromme K^3, die de meetkundige plaats der brandpunten is, zal de lijnen MR, MS, MU en MV aanraken in de punten R, S, U en V en de raaklijn in O_1 zal antiparallel zijn aan MO_1 ten opzichte van O_1O_2 en O_1O_3. Want de kromme K^3 is de meetkundige plaats der punten, waaruit men de paren van toegevoegde punten in involutie ziet; tot de involutie om O_1 behooren de lijnen O_1O_2 en O_1O_3 als dubbelstralen. Aangezien deze loodrecht op elkaar staan, heeft men om O_1 een symmetrische involutie, m. a. w. elke twee overeenkomstige stralen zijn antiparallel ten opzichte van de dubbelstralen; met O_1M komt de lijn O_1O_1 of de raaklijn in O_1 overeen.

De kromme K^3 is ook de meetkundige plaats der snijpunten van twee half-perspectieve involuties om O_1 en M. Omdat O_1O_2 en O_1O_3 de dubbelstralen zijn bij O_1, zullen MR, MS, MU en MV de kromme aanraken in de genoemde punten.

Een bicirculaire C_0^4 is op twee verschillende wijzen de meetkundige plaats van de grenspunten van een oneindig aantal cirkel-

bundels, waarvan elke bundel bepaald is door een der twee richtcirkels en een willekeurige raaklijn aan den bijbehoorenden deferent.

Wanneer een der richtcirkels een as van symmetrie wordt, dan kan men slechts op één wijze de kromme door middel van richtcirkel en deferent voortbrengen. Gaan eindelijk beide richtcirkels over in assen van symmetrie, dan kan men niet rechtstreeks de kromme op deze wijze construeeren. Langs een omweg zouden we toch de kromme punt voor punt kunnen vinden. Wij gaan dan de gegevens uit een willekeurig punt Q inverteeren; de C_0^4 met twee symmetrie-assen gaat dan over in een andere C_0^4, waarvan de cirkels, die door inversie uit de symmetrie-assen ontstaan, de richtcirkels zijn. Deze laatste C_0^4 is nu door middel van richtcirkel en deferent punt voor punt te construeeren en door reïnversie de C_0^4 met de twee assen van symmetrie. Ook kan men onmiddellijk de kromme met twee symmetrie-assen op de volgende wijze construeeren.

Aangezien de kromme symmetrisch is ten opzichte van twee assen door O_1 (fig. 7) zal elke cirkel, die O_1 tot middelpunt heeft, de kromme in vier punten snijden, welke even als P_1, P_2, P_3 en P_4 de hoekpunten van een rechthoek vormen. Daaruit blijkt, dat de kromme voort te brengen is als meetkundige plaats van snijpunten van een bundel concentrische cirkels met O_1 tot middelpunt en een straleninvolutie om O_1, die projectief verwant is met den cirkelbundel. Door twee willekeurig gegeven punten moet de projectiviteit vastgelegd zijn, aangezien alle bicirculaire krommen C_0^4, behoorende bij twee lijnen als symmetrie-assen, even goed een net vormen als die, welke bij twee elkaar loodrecht snijdende richtcirkels behooren. Zorgt men er namelijk voor, dat de cirkel door de beide punten α_1 (fig. 8) overeenkomt met de beide stralen $O_1\alpha_1$, die door de beide punten β_1 met de stralen $O_1 b_1$, terwijl bovendien de lijn l_∞, die tot den bundel concentrische cirkels behoort en wel tweemaal geteld, overeenkomt met de lijnen door O_1 naar de cirkelpunten ω_1 en ω_2, dan zal daardoor het projectief verband aangegeven zijn en komt het er alleen nog op aan om het gegevene bruikbaar te maken voor een constructie.

De vergelijking van de kromme, op deze wijze voortgebracht, vindt men door λ te elimineeren uit

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ cirkelbundel}$$

en

$$\lambda^2(x^2 + y^2) = px^2 + qy^2 \quad \ldots\ldots \text{ straleninvolutie;}$$

dit geeft $$(x^2 + y^2)^2 = px^2 + qy^2.$$

De straleninvolutie om O_1 is als punteninvolutie op een willekeurigen cirkel $[m]$ door O_1 overgebracht; op $[m]$ krijgt men dan de puntenparen (a_2), (b_2) en de cirkelpunten ω_1 en ω_2. Verbindt men de punten (a_2) en eveneens (b_2) met elkaar, dan verkrijgt men een stralenbundel, die zijn top P_∞ in het oneindige heeft; tot dezen bundel behoort de lijn l_∞. Door een straal van dezen bundel is een stralenpaar van de involutie om O_1 bepaald. In plaats van dezen bundel neemt men verder de puntenreeks op AB, die door de stralen op die lijn wordt ingesneden; dan verkrijgt men de punten a_3, b_3 en g_3, het oneindig ver gelegen punt van AB.

De cirkel, die overeenkomt met O_1a_1, kunnen we geven door de punten (α_1), de overeenkomstige van O_1b_1 door (β_1); eindelijk de lijn l_∞ door de punten γ_1 in het oneindig ver gelegen punt van de symmetrie-as O_1F samengevallen. De puntenparen van deze involutie op O_1F verbindt men met een willekeurig punt P; dit geeft een straleninvolutie om dat punt. Die straleninvolutie brengt men over als punteninvolutie op een cirkel door P; deze cirkel $[n]$ is willekeurig te nemen, doch om gemakkelijk tot perspectieve puntenreeksen te komen, heb ik dien cirkel gebracht door twee punten (α_2), die op de beide stralen $P\alpha_1$ en met a_3 op een zelfde lijn liggen. De verbindingslijnen van de puntenparen op dezen cirkel vormen dan een stralenbundel om T, die op de lijn CD (willekeurig getrokken door a_3) een puntenreeks (α_3, β_3, γ_3, enz.) insnijdt, die perspectivisch is met de puntenreeks op AB. Hiervan

komt α_3 overeen met a_3 en valt er mee samen,
" β_3 " " b_3,
" γ_3 " " g_3.

De lijnen β_3b_3 en γ_3g_3 bepalen het punt S, waardoor alle verbindingslijnen van overeenkomstige punten gaan. Nu is alles voor de constructie gereed; deze wordt als volgt uitgevoerd. Neem een straal door O_1, namelijk O_1d_1 (de bijbehoorende in de involutie is dan gegeven), bepaal het snijpunt van O_1d_1 met $[m]$, dit is d_2; trek door d_2 een lijn naar P_∞, het snijpunt van deze lijn met AB is d_3; verbind d_3 met S, het snijpunt van Sd_3 met CD is δ_3; verbind δ_3 met T en bepaal de snijpunten (δ_2) van die verbindingslijn met den cirkel $[n]$. De lijnen $P\delta_2$ snijden O_1F in de punten (δ_1) en deze punten eindelijk bepalen den cirkel, die overeenkomt met de stralen O_1d_1.

Een willekeurige kromme uit den bundel, bepaald door de

basispunten P_i (zie fig. 6), zou men langs dezen weg punt voor punt kunnen bepalen; daarvoor gaat men de gegevens uit S_{23} inverteeren; dan verkrijgt men een lemniscaatachtige kromme, die men op de aangegeven wijze kan construeeren; door een reïnversie vindt men dan de kromme uit den bundel (P_i).

Wil men echter door middel van reïnversie een kromme uit den bundel met de basispunten P_i (fig. 6) construeeren, dan is het gemakkelijker de gegevens uit O_1 te inverteeren; zoo als reeds gezegd is, gaat C_0^4 daardoor in een kegelsnede over. Neem voor de meetkundige plaats van de dubbelpunten der inversie uit O_1 den cirkel, die den cirkel, waarop de basispunten P_i liggen, loodrecht snijdt. De geïnverteerden Π_i van P_i blijven dan op denzelfden cirkel. De vier punten Π_i vormen nu de basispunten van een bundel kegelsneden; geven we nu door een punt P_5 een bepaalde C_0^4, dan zal het geïnverteerde punt Π_5 een kegelsnede uit dien bundel bepalen. Die kegelsnede gaat men punt voor punt construeeren en door deze punten terug te inverteeren verkrijgt men C_0^4. De punten Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 zijn de hoekpunten van een rechthoek. De cirkel door O_1, P_3 en P_4 raakt O_3O_1; deze cirkel gaat — omdat de hoek, waaronder twee lijnen elkaar snijden, niet verandert — door inversie over in een lijn, die evenwijdig is aan O_3O_1. De cirkel door O_1, P_2 en P_1 raakt O_3O_1 eveneens in O_1 aan; daarom is $\Pi_1\Pi_2$ ook evenwijdig aan O_3O_1. Evenzoo zullen $\Pi_1\Pi_3$ en $\Pi_2\Pi_4$ evenwijdig zijn aan O_2O_1. Vindt men voor de kegelsnede door Π_5 een hyperbool, dan zal de bicirculaire C_0^4 een kromme met knooppunt zijn; vindt men een ellips, dan is de overeenkomstige C_0^4 een kromme met geïsoleerd punt. De verkregen kegelsnede heeft met de overeenkomstige C_0^4 acht punten gemeen; vier liggen in de snijpunten van C^2 met den inversiecirkel om O_1. Bovendien zullen er nog vier punten α_1, α_2, β_1, β_2 zoodanig op C^2 moeten liggen, dat α_1 in α_2 en β_1 in β_2 overgaat en omgekeerd.

In verband met de voortbrengingsmethode door deferent en richtcirkel zij nog het volgende over de dubbelraaklijnen opgemerkt. De beide deferenten, die bij een zelfde kromme behooren, zijn confocaal en gaan beide door O_1. Als twee confocale kegelsneden één bestaanbaar snijpunt hebben, hebben zij er ook vier; de eene kegelsnede is dan een ellips en de andere een hyperbool, omdat twee confocale ellipsen of twee confocale hyperbolen geen bestaanbare snijpunten leveren. Hieruit volgt dat, zoo de beide dubbelraaklijnen door O_2, die de epicykels zijn, wier middelpunten

in het oneindige liggen, bestaanbaar zijn, die door O_3 onbestaanbaar zullen wezen en omgekeerd. Bovendien zullen de dubbelraaklijnen loodrecht staan op de asymptoten van den deferent.

Brandpunten.

Een willekeurige bicirculaire kromme C_0^4 van het net heeft vier gewone en vier afzonderlijke brandpunten. De vier gewone zijn de beide paren van snijpunten der richtcirkels $[O_2]$ en $[O_3]$ met de bij de kromme behoorenden deferenten; de afzonderlijke zijn de gemeenschappelijke brandpunten der beide deferenten.

Door inversie gaat een dubbelrakende cirkel over in een dubbelrakenden cirkel, een dubbelrakende puntcirkel in een dubbelrakenden puntcirkel, derhalve een gewoon brandpunt in een gewoon brandpunt. Aangezien de bicirculaire C_0^4 is verkregen uit een circulaire C_0^3, kan men, wat de gewone brandpunten betreft, verwijzen naar het overeenkomstige bij de laatstgenoemde krommen.

Daar de afzonderlijke brandpunten van een kromme, die de omhullende is van cirkels, wier middelpunten liggen op een deferent, samenvallen met de gewone brandpunten van dezen deferent, is ook het tweede gedeelte van bovenstaande stelling bewezen. Ook kan men dezelfde methode toepassen, waardoor is aangetoond (pag. 5), dat het afzonderlijk brandpunt van een C_0^3 samenvalt met het brandpunt van haar deferenten.

Daarvoor neemt men uit het net den bundel, die bepaald is door de basispunten P_i (fig. 6); de raaklijnen *in* het punt ω_1 getrokken aan de krommen van dezen bundel vormen om ω_1 een straleninvolutie en deze is projectief verwant met de involutie, die gevormd wordt door de raaklijnen *uit* dit punt ω_1 getrokken aan de overeenkomstige deferenten. Wanneer nu drie stralenparen van de eerste involutie samenvallen met hun overeenkomstige paren uit de tweede, dan zal elk paar samenvallen met zijn overeenkomstige. Vrij gemakkelijk zijn er nu drie dergelijke paren uit de twee involuties aan te wijzen. Neem daarvoor in de eerste plaats de kromme bestaande uit de cirkels $O_1P_2P_4$ en $O_1P_1P_3$: de afzonderlijke brandpunten zijn R en S. Ook hebben we gezien, dat dit de brandpunten waren der bijbehoorende deferenten. Neem vervolgens de kromme, die bestaat uit de cirkels $O_1P_3P_4$ en $O_1P_1P_3$; de afzonderlijke brandpunten zijn U en V en dit zullen ook weer de brandpunten zijn der deferenten. Eindelijk kan men als derde

kromme den puntcirkel O_1 met den cirkel door P_i nemen; de afzonderlijke brandpunten O_1 en M zijn dan ook weer de punten, waarin de deferenten ontaarden. Een vierde kromme zou zelfs de C_0^3 uit den bundel, aangevuld door l_∞, kunnen zijn. Hieruit volgt, dat de stelling voor alle krommen uit den bundel doorgaat. Op dezelfde wijs kan men dit voor elken anderen bundel en dus voor het geheele net aantoonen.

Door inversie der circulaire krommen C_0^3 leidt men gemakkelijk het volgende af:

Een willekeurig punt van een der beide richtcirkels $[O_2]$ of $[O_3]$ is gewoon brandpunt van twee krommen C_0^4 uit een bundel (P_i). Deze krommen noemt men confocaal; in elk bestaanbaar snijpunt, dus in de vier basispunten P_i, snijden zij elkaar rechthoekig. Van twee confocale krommen uit den bundel zal de eene een knooppunt en de andere een geïsoleerd punt hebben. Uitzondering hierop maken de in twee cirkels ontaarde krommen.

Een willekeurig punt van een der beide richtcirkels is gewoon brandpunt van een oneindig aantal confocale krommen van het net; van dit oneindig aantal gaan er twee door een willekeurig gegeven punt. Elke twee willekeurige krommen van die reeks snijden elkaar rechthoekig. Neemt men n.l. op $[O_2]$ een punt F_1 als gewoon brandpunt aan, dan zal men door dit punt met O_3 te verbinden een tweede brandpunt F_2 op $[O_2]$ vinden. De deferenten, die behooren bij de krommen, waarvan F_1 en F_2 brandpunten zijn, zullen derhalve moeten gaan door F_1 en F_2 en bovendien in O_1 raken aan O_3O_1. Deze kegelsneden vormen derhalve een bundel en komen dus in oneindig aantal voor, waaruit volgt, dat de epicykels een oneindig groot aantal krommen omhullen. Neemt men nu een willekeurig punt O_1 aan, dan bepaalt dit punt een bundel uit het net, en de kromme, die door O_1 gaat en F_1 en F_2 tot brandpunten heeft, zal tot dien bundel behooren; in dezen bundel zijn er, zoo als boven is aangetoond, twee krommen, die F_1 tot brandpunt hebben. Derhalve gaan er door elk punt twee confocale krommen uit het net.

Daar door inversie een gewoon brandpunt van een kromme overgaat in een gewoon brandpunt van haar geïnverteerde en een kegelsnede in een bicirculaire kromme van den vierden graad, had men bovenstaande eigenschappen ook kunnen afleiden uit die der kegelsneden.

Inverteert men n.l. alle krommen C^2, die bij twee symmetrie-assen behooren en derhalve een net vormen, uit een punt,

dan ontstaat er een net van krommen C_0^4, die anallagmatisch zijn ten opzichte van twee inversies. De meetkundige plaats der dubbelpunten dier inversies wordt gevormd door de cirkels, die de geïnverteerden zijn van de beide symmetrie-assen. De vier brandpunten van een kegelsnede liggen twee aan twee op de assen van symmetrie; derhalve liggen de brandpunten van een C_0^4 twee aan twee op de inversie-cirkels.

Neemt men op een der assen een brandpunt aan, dan zijn daardoor de drie andere brandpunten van deze C^2 bepaald; deze brandpunten bepalen een schaar uit het net. Op dezelfde wijze zal een brandpunt op een richtcirkel een enkelvoudig oneindig aantal krommen C_0^4 bepalen. Door een punt gaan twee kegelsneden van bovengenoemde schaar, een ellips en een hyperbool. Door een punt gaan derhalve ook twee krommen C_0^4 van dat oneindig aantal, een met een geïsoleerd punt en een met een knooppunt, die confocaal zijn. De confocale kegelsneden snijden elkaar rechthoekig; dus hebben ook de confocale bicirculaire krommen van den vierden graad dezelfde eigenschap. Zoo zou men kunnen doorgaan.

Meetkundige plaatsen.

Als een kromme C_0^4 een bundel met de basispunten P_i doorloopt, dan heeft men:

α. De deferenten, die bij die kromme behooren, doorloopen ieder voor zich een schaar; de basisraaklijnen van de eene schaar zijn de lijnen MU, MV en O_1O_2 (tweemaal); die van de andere MR, MS en O_1O_3 (tweemaal). De beide scharen zijn projectief verbonden door den bundel C_0^4; zij hebben een kromme gemeen n.l. de in de punten O_1 en M ontaarde kegelsnede; zij behooren derhalve tot hetzelfde weefsel (tangentiëel net).

β. De gewone brandpunten vormen op $[O_2]$ en $[O_3]$ een involutie, waarvan O_1 en S_{23} de dubbelpunten zijn.

γ. De beide afzonderlijke brandpunten zijn paren van toegevoegde punten op een circulaire K^3, welke bepaald is door de puntenparen (U, V), (R, S), (M, O_1). Deze kromme gaat door ω_1 en ω_2 en verder door de middelpunten der cirkels $O_1P_1P_4$ en OP_2P_3. Ook gaat zij door het punt A_1; zij snijdt den negenpuntscirkel in A_1, raakt hem in O_1 en snijdt hem bovendien nog in een punt, dat het afzonderlijk brandpunt is van de circulaire C_0^3, die met l_∞ vereenigd tot den bundel

bicirculaire krommen van den vierden graad behoort. Dit laatste punt is ook het afzonderlijk brandpunt der meetkundige plaats zelve.

Dat A_1 tot de meetkundige plaats behoort, kan men op de volgende wijze aantoonen. De kromme K^3 is bepaald door drie paren toegevoegde punten als de meetkundige plaats van punten, waaruit men deze drie puntenparen in involutie ziet [1]. Uit A_1 nu ziet men de puntenparen in involutie, dus behoort dit punt tot de kromme. Wij denken ons n.l. (fig. 6) A_1 verbonden met R en S; deze beide punten behooren tot een involutie op O_1O_3, de middelpunten van den bundel van cirkelparen, die elkaar in O_1 aanraken en tot het net C_0^4 behooren, waarvan O_1 en O_3 de dubbelpunten zijn. Gaan we de puntenparen van deze involutie met A_1 verbinden, dan vinden we een straleninvolutie om A_1, die symmetrisch is, omdat de dubbelstralen A_1O_1 en A_1O_3 rechthoekig op elkaar staan. Twee overeenkomstige stralen A_1S en A_1R maken dus gelijke hoeken met A_1O_3; op dezelfde wijze A_1U en A_1V, en bovendien A_1O_1 en A_1M. Dus worden de puntenparen (U,V), (R,S) en (M_1,O_1) uit A_1 in involutie gezien.

De raaklijn aan K^3 in O_1 is de lijn, die door O_1 gaat en antiparallel is aan O_1A_1 met betrekking tot O_1O_3; deze lijn zal rechte hoeken maken met den straal van c_n door O_1 en dus c_n aanraken (zie fig. 1). Immers O_1M_{23} is middellijn van c_n, $O_1M_{23} = O_3M_{23}$ dus $\angle O_1O_3M_{23} = \angle O_3O_1M_{23}$ en $\angle O_3O_1A_1 + \angle O_1O_3M_{23} = 90°$; derhalve is ook $\angle O_3O_1A_1 + \angle O_3O_1M_{23} = 90°$.

Het brandpunt F van de C_0^3 uit den bundel is toegevoegd aan het bestaanbaar punt in het oneindige van K^3. Door twee toegevoegde punten uit een punt van K^3 op K^3 te projecteeren, komt men op een ander paar toegevoegde punten van het zelfde stel te recht. Projecteert men P_∞, het bestaanbaar punt van K^3 in het oneindige, uit ω_2, dan vindt men ω_1; projecteert men F uit ω_2, dan moet men het toegevoegde punt van ω_1 krijgen, dus ω_2 zelf. Derhalve raakt ω_2F de kromme aan in ω_2 en eveneens is ω_1F raaklijn in ω_1; dus is F het afzonderlijk brandpunt van K^3.

Als een bicirculaire C_0^4 het geheele net doorloopt, dan heeft men:

a. De beide deferenten doorloopen ieder een weefsel, omdat een der kegelsneden bepaald is door twee willekeurige raaklijnen. Een raaklijn l bepaalt een schaar, die men op de volgende wijze vindt: Neem het snijpunt van l met O_1O_2; noem dit

[1]) Schröter, „Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung", pag. 4.

punt L_1. Zoek in de involutie op O_1O_2 waarvan O_1 en O_2 de dubbelpunten zijn het overeenkomstige punt van L_1 en noem dit L_2. Verbind nu L_1 en L_2 met het snijpunt X van O_1A en l, dan zullen XL_1 $(= l)$ en XL_2 twee raaklijnen aan den deferent zijn, die behoort bij $[O_3]$. Bovendien is nog gegeven, dat de kegelsnee O_1O_2 moet aanraken in het punt O_1; derhalve zijn nog twee samengevallen raaklijnen bekend. Een raaklijn l bepaalt een schaar en dus twee raaklijnen een deferent. De beide weefsels zijn projectief verbonden door de krommen C_0^4. Bovendien behooren ze tot hetzelfde lineair stelsel, omdat ze een schaar gemeen hebben. De kromme van HERMITE [1]) van het eene weefsel bestaat uit A_1O_1 en O_1O_2 (tweemaal geteld) en die van het andere weefsel uit A_1O_1 en O_1O_3 (tweemaal geteld). De schaar van kegelsneden, welke is ontaard in puntenparen op A_1O_1, behoort derhalve tot beide.

β. De gewone brandpunten vormen op $[O_2]$ en $[O_3]$ een involutie waarvan O_1 en S_{23} de dubbelpunten zijn.

γ. De vier afzonderlijke brandpunten doorloopen het geheele vlak. Omdat door één dezer brandpunten een kromme van het net wordt bepaald, vormen de vier afzonderlijke brandpunten een involutie. Is een brandpunt F_1 gegeven, dan verbindt men F_1 met O_1 en trekt de lijn door O_1 die met betrekking tot O_1O_2 (of O_1O_3) anti-parallel is aan O_1F_1; op deze lijn zal het brandpunt F_2 moeten liggen. Vervolgens verbindt men F_1 met A_1 en trekt dan de lijn door A_1 die antiparallel is aan A_1F_1 met betrekking tot O_2O_3; dan zal ook op deze lijn F_2 moeten liggen. De brandpunten van de kegelsneden zijn dan bepaald en bovendien het punt O_1; dus nu is C^2 bekend en daaruit C_0^4.

De kromme lijnen van den derden graad, die de meetkundige plaats van de afzonderlijke brandpunten der verschillende bundels zijn, vormen eveneens een net. Een kromme van het net behoort tot een oneindig aantal bundels; dus door het brandpunt F_1 van die kromme gaan oneindig veel krommen K^3 of een bundel. Het geheel vormt derhalve een net. Dit net heeft vijf basispunten n.l. ω_1, ω_2, A_1 en twee punten in O_1. Twee krommen snijden elkaar in vier beweeglijke punten; dit zijn de afzonderlijke brandpunten van een kromme C_0^4, die tot beide bundels behoort, welke bepaald worden door de twee krommen K^3.

[1]) Zie S. pag. 27, noot 44.

Zooals we boven hebben gezien, ligt het afzonderlijk brandpunt van een brandkromme K^3 op c_n. Als dus twee dergelijke krommen hetzelfde brandpunt φ hebben, dan snijden ze elkaar in de volgende punten: O_1 (tweemaal), A_1, φ, ω_1 (tweemaal), ω_2 (tweemaal) en een nog onbekend punt X. Wanneer van de negen snijpunten er zes op een kegelsnede liggen, dan liggen de drie anderen op een rechte lijn. Nu liggen O_1 (tweemaal) A, φ, ω_1 en ω_2 op c_n, dus ω_1, ω_2 en X op een rechte lijn. Het negende snijpunt X ligt dus op de lijn in het oneindige, dus:

Alle krommen van het net van brandkrommen K^3, die een zelfde punt φ op c_n tot afzonderlijk brandpunt hebben, vormen een bundel, waarvan het negende basispunt in het oneindige ligt.

Cassini'sche kromme.

Een CASSINI'SCHE kromme is een kromme, die in elk der punten ω_1 en ω_2 een dubbelbuigpunt (fleflecnodaalpunt) heeft. De gewone en afzonderlijke brandpunten van deze C^4 vallen samen en daaruit volgt, dat zij twee symmetrie-assen bezit [1]).

Wanneer men een net van kegelsneden, behoorende bij een assenpaar, uit het middelpunt inverteert, ontstaat er een net van krommen C_0^4 met twee symmetrie-assen. Op de volgende wijze zullen we analytisch onderzoeken, of er in dit laatste net ook krommen met een dubbelbuigpunt in ω_1 en ω_2 voorkomen.

De vergelijking van een kegelsnede met de assen a en b, die hier willekeurig zijn, is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

Is nu de macht van de inversie k^2, dan heeft men (fig. 9) de volgende betrekkingen

$$rr' = k^2, \quad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r}{r'} = \frac{rr'}{r'^2} = \frac{k^2}{x'^2 + y'^2}$$

en derhalve

$$x = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Substitueert men deze waarden voor x en y in (13), dan vindt

---

1) Zie S. pag. 27, noot 46.

men, na weglating der accenten, als vergelijking van de geïnverteerde kromme

$$\frac{k^4x^2}{a^2(x^2+y^2)^2}+\frac{k^4y^2}{b^2(x^2+y^2)^2}=1,$$

of

$$b^2x^2+a^2y^2=\frac{a^2b^2}{k^4}(x^2+y^2)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Door de inversie is een gewoon brandpunt F $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ van de kegelsnede overgegaan in een gewoon brandpunt van C_0^4.

De coördinaten van dit brandpunt F′ zijn derhalve $\dfrac{k^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ en 0.

De vergelijking van den puntcirkel in het punt F′ zal zijn

$$\left(x-\frac{k^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2+y^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15).$$

Zullen nu ω_1 en ω_2 dubbelbuigpunten zijn van C_0^4, dan moeten alle snijpunten van de krommen voorgesteld door (14) en (15) in het oneindige liggen. Elimineert men uit deze beide vergelijkingen y^2, dan vindt men

$$b^2x^2-a^2x^2+\frac{2a^2k^2}{\sqrt{a^2-b^2}}x-\frac{a^2k^4}{a^2-b^2}=\frac{a^2b^2}{k^4}\left(2\frac{k^2}{\sqrt{a^2-b^2}}x-\frac{k^4}{a^2-b^2}\right)^2.$$

De coëfficiënt van x^2 is

$$b^2-a^2-\frac{4\,a^2b^2}{a^2-b^2},$$

die van x

$$\frac{2\,a^2k^2}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{4\,a^2b^2k^2}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Zullen alle snijpunten in het oneindige liggen, dan moeten deze coëfficiënten beide nul zijn.

Derhalve

$$b^2-a^2-\frac{4\,a^2b^2}{a^2-b^2}=0 \text{ en } \frac{2\,a^2k^2}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{4\,a^2b^2k^2}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}}=0,$$

of

$$-4a^2b^2=(a^2-b^2)^2 \text{ en } 2a^2(a^2-b^2)=-4a^2b^2,$$

of

$$a^2+b^2=0 \text{ en } a^2(a^2+b^2)=0$$

zijn de voorwaarden, waaraan de assen van een kegelsnede moeten voldoen, opdat zij door inversie in een Cassini'sche kromme overgaat; hieraan wordt voldaan, zoodra $a^2 = -b^2$.

Men ziet dus, dat de gelijkzijdige hyperbolen van het net de gezochte krommen leveren en deze tot vergelijking hebben.

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{k^4}(x^2 + y^2)^2.$$

Dit is de vergelijking van de lemniscaat van BERNOULLI.

Ovalen van Descartes.

Wanneer men een kegelsnede en eveneens een C_0^4 uit een harer brandpunten inverteert, ontstaat er een C_0^4, waarvan ω_1 en ω_2 keerpunten zijn, zooals op de volgende wijze zal blijken.

De vergelijking van een kegelsnede, waarvan het brandpunt F in den oorsprong ligt, is $\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Substitueert men in deze vergelijking weer

$$x = \frac{k^2x'}{x'^2 + y'^2} \text{ en } y = \frac{k^2y'}{x'^2 + y'^2},$$

zoo vindt men, na weglating der accenten, als vergelijking van de geïnverteerde kromme

$$\frac{k^4}{a^2}x^2 + \frac{k^4}{b^2}y^2 + 2\frac{ck^2x}{a^2}(x^2 + y^2) = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + y^2)^2,$$

of

$$k^4b^2x^2 + k^4a^2y^2 + 2cb^2k^2(x^2 + y^2)x - b^4(x^2 + y^2)^2 = 0,$$

of

$$-k^4c^2x^2 + k^4a^2(x^2 + y^2) + 2cb^2k^2(x^2 + y^2)x - b^4(x^2 + y^2)^2 = 0,$$

of

$$\{b^2(x^2 + y^2) - ck^2x\}^2 = a^2k^4(x^2 + y^2).$$

Dit is de vergelijking van de limaçon van PASCAL (zie BRIOT et BOUQUET, „Geométrie Analytique", pag. 21).

Stelt men $\frac{ck^2}{b^2} = \beta$ en $\frac{a^2k^4}{b^4} = \alpha^2$, dan verkrijgt de vergelijking den volgenden eenvoudigen vorm

$$[(x^2 + y^2) - \beta x]^2 = \alpha^2(x^2 + y^2) \quad \ldots\ldots\ldots (16).$$

De coördinaten der afzonderlijke brandpunten van deze kromme

vindt men door p en q zoo te bepalen, dat er van de snijpunten van (16) met den puntcirkel

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy - q^2 = 0 \ldots\ldots (17)$$

slechts twee in het eindige liggen.

Uit (17) volgt $x^2 + y^2 = 2px + 2qy - (p^2 + q^2)$; deze waarde voor $x^2 + y^2$ gesubstitueerd in (16) geeft

$$[(2p - \beta)x + 2qy - (p^2 + q^2)]^2 = \alpha^2 [2px + 3qy - (p^2 + q^2)] \;.\; (18).$$

Nu zullen (17) en (18) slechts twee snijpunten in het eindige opleveren, als (18) een cirkel voorstelt. Dit is het geval als de coëfficiënten van x^2 en y^2 aan elkaar gelijk zijn en de coëfficiënt van xy nul is. Derhalve gelden de voorwaarden

$$(2p - \beta)^2 + 4q^2 \ldots (19), \qquad q(2p - \beta) = 0 \;\ldots\; (20).$$

Aan deze beide voorwaarden wordt alleen voldaan door de waarden $p = \frac{1}{2}\beta$ en $q = 0$, welke we dan viermaal moeten tellen. Dit blijkt gemakkelijk uit de volgende beschouwing:

De vergelijking (19) stelt twee rechte lijnen voor, die door het punt $(\frac{1}{2}\beta, 0)$ gaan en eveneens (20). Deze twee paren lijnen snijden elkaar dus viermaal in dat punt.

Uit het bovenstaande volgt, dat de vier afzonderlijke brandpunten in één punt zijn samengevallen; derhalve zal de kromme, voorgesteld door (16), in de punten ω_1 en ω_2 keerpunten moeten hebben.

De coördinaten van de gewone brandpunten vindt men door p en q zoo te bepalen, dat de vier snijpunten van (16) en (17), die in het eindige liggen, twee aan twee samenvallen. Substitueert men

$$x^2 + y^2 = 2px + 2qy - (p^2 + q^2)$$

weer in (16), dan komt er

$$[2px + 2qy - (p^2 + q^2) - \beta x]^2 - \alpha^2 [2px + 2qy - (p^2 + q^2)] = 0 \,.\,. (21).$$

Nu stellen (21) en (17) elk voor zich een kromme lijn van den tweeden graad voor; deze twee krommen zullen elkaar in twee punten raken, als er in den bundel, welke door haar wordt bepaald, een kromme voorkomt, die ontaard is in twee samengevallen rechte lijnen.

De bundel zij

$$\{2px + 2qy - (p^2 + q^2) - \beta x\}^2 - \alpha^2\{2px + 2qy - (p^2 + q^2)\} -$$
$$- \mu\{x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2\} = 0 \ldots\ldots (22).$$

Het komt er nu op aan p, q en μ zoo te bepalen, dat dit de vergelijking is van twee samengevallen rechte lijnen. Een kegel-

snede zal ontaard zijn in twee samengevallen lijnen, als alle rechte lijnen door een willekeurig punt P buiten deze kromme, met de kegelsnede twee samengevallen snijpunten opleveren (zie pag. 30); voor dit willekeurig punt kan men den oorsprong nemen; de vergelijking van de rechte lijnen door O zij $y = Ax$; substitueert men deze waarde van y in vergelijking (22), dan zal de vierkantsvergelijking in x, die dan ontstaat, twee gelijke wortels moeten hebben, onafhankelijk van de waarde van A.

Als eerste voorwaarde vindt men dus

$$[\{2p + 2qA - \beta\}^2 - \mu(1 + A^2)] [(p^2 + q^2)^2 + (\alpha^2 - \mu)(p^2 + q^2)] =$$
$$= [(p^2 + q^2)(2p + 2qA - \beta) + (\alpha^2 - \mu)(p + qA)]^2,$$

of

$$\{2p+2qA-\beta\}^2(\alpha^2-\mu)(p^2+q^2) - \mu(1+A^2)\{(p^2+q^2)^2+(\alpha^2-\mu)(p^2+q^2)\} =$$
$$= 2(p^2+q^2)(2p+2qA-\beta)(\alpha^2-\mu)(p+qA) + (\alpha^2-\mu)^2(p+qA)^2.$$

Zal deze betrekking bestaan onafhankelijk van A, dan moeten de coëfficiënten van A^2 en A en eveneens de bekende term nul zijn. Wij verkrijgen dus de drie volgende voorwaarden:

$$-\mu\{(p^2+q^2)^2 + (\alpha^2-\mu)(p^2+q^2)\} = (\alpha^2-\mu)^2 q^2 \quad . \; . \; (23);$$

$$4(2p-\beta)(\alpha^2-\mu)(p^2+q^2)q = 2(\alpha^2-\mu)pq + 2(2p-\beta)(\alpha^2-\mu)(p^2+q^2)q +$$
$$+ 4(p^2+q^2)(\alpha^2-\mu)pq,$$

of

$$q(\alpha^2-\mu)\{-\beta(p^2+q^2) - (\alpha^2-\mu)p\} - 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (24);$$

$$(2p-\beta)^2(\alpha^2-\mu)(p^2+q^2) - \mu\{(p^2+q^2)^2 + (\alpha^2-\mu)(p^2+q^2)\} =$$
$$= (\alpha^2-\mu)^2 p^2 + 2(p^2+q^2)(2p-\beta)(\alpha^2-\mu)p,$$

of $$\{(2p-\beta)^2 - \mu\}\{(p^2+q^2)^2 + (\alpha-\mu)(p^2+q^2)\} =$$
$$= \{(\alpha^2-\mu)p + (p^2+q^2)(2p-\beta)\}^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25).$$

Uit deze drie vergelijkingen kunnen we p, q en μ oplossen en de coördinaten (p, q) der brandpunten bepalen. Intusschen dient er op gelet te worden, dat er waarden van p en q ingeslopen zijn, welke geen brandpunt opleveren, zooals uit het volgende zal blijken. De combinatie van $p = 0$ met $q = 0$ kunnen we onmiddellijk weglaten, omdat deze een dubbelpunt van (16) kenmerkt.

Voor de oplossing van deze drie vergelijkingen kan men beginnen met (24). Aan deze vergelijking wordt op drie wijzen voldaan n.l. door te stellen

$a) \; . \; . \; . \; q = 0,$

$b) \; . \; . \; . \; (\alpha^2 - \mu) = 0,$

$c) \; . \; . \; . \; -\beta(p^2 + q^2) - (\alpha^2 - \mu)p = 0.$

a. Indien $q = 0$ is, vindt men uit de beide andere vergelijkingen:

$$\mu\{p^4 + (\alpha^2 - \mu)p^2\} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

en

$$\{(2p - \beta)^2 - \mu\}\{p^4 + (\alpha^2 - \mu)p^2\} = \{(\alpha^2 - \mu)p + (2p - \beta)p^2\}^2 \quad . \; . \; (27).$$

Uit de eerste vergelijking volgt $\mu = 0$ of $p^4 + (\alpha^2 - \mu)p^2 = 0$.

a_1. Invoeging van $\mu = 0$ in de tweede vergelijking geeft

$$(2p - \beta)^2(p^4 + \alpha^2 p^2) = \{\alpha^2 p + (2p - \beta)p^2\}^2,$$

of

$$(2p - \beta)^2(p^2 + \alpha^2) = \{\alpha^2 + (2p - \beta)p\}^2,$$

of

$$(2p - \beta)^2(p^2 + \alpha^2) = \alpha^4 + 2\alpha^2 p(2p - \beta) + (2p - \beta)p^2,$$

of

$$(2p - \beta)^2 = \alpha^2 + 2p(2p - \beta),$$

of

$$-2\beta p + \beta^2 = \alpha^2$$

en dus

$$p = \frac{-\alpha^2 + \beta^2}{2\beta}.$$

Voegt men voor α en β de oorspronkelijke waarden in, dan is

$$p = \frac{-\frac{a^2k^4}{b^4} + \frac{c^2k^4}{b^4}}{2\frac{ck^2}{b^2}} = -\frac{k^4}{2ck^2} = -\frac{k^2}{2c}.$$

Dit punt hadden we onmiddellijk kunnen aanwijzen; wanneer we uit het punt F het andere brandpunt F′ van de kegelsnede gaan inverteeren, terwijl de macht der involutie k^2 is, dan verkrijgen we het punt $\frac{-k^2}{2c}$.

De vergelijking van de bij dit brandpunt behoorende richtlijn vindt men door in (22) zoowel μ als q nul te stellen en $p = \frac{-\alpha^2 + \beta^2}{2\beta}$; dit geeft

$$\left\{\left(\frac{-\alpha^2+\beta^2}{\beta} - \beta\right)x - \left(\frac{-\alpha^2+\beta^2}{2\beta}\right)^2\right\}^2 - \alpha^2\left\{\frac{-\alpha^2+\beta^2}{\beta}x - \left(\frac{-\alpha^2+\beta^2}{2\beta}\right)^2\right\}^2 = 0.$$

Voert men voor a^2 en β de waarden $\dfrac{a^2k^4}{b^4}$ en $\dfrac{ck^2}{b^2}$ in, dan komt er

$$\left\{\left(-\frac{k^2}{c}-\frac{ck^2}{b^2}\right)x-\frac{k^4}{4c^2}\right\}^2-\frac{a^2k^4}{b^4}\left(-\frac{k^2}{c}x-\frac{k^4}{4c^2}\right)=0,$$

of

$$\left\{\frac{a^2}{b^2c}x+\frac{k^2}{4c^2}\right\}^2+\frac{a^2}{b^4}\left(\frac{k^2}{c}x+\frac{k^4}{4c^2}\right)=0,$$

o

$$\left(\frac{a^2}{b^2}x+\frac{k^2}{4c}\right)^2+\frac{a^2}{b^4}\left(k^2cx+\frac{k^4}{4}\right)=0,$$

of

$$\frac{a^4}{b^4}x^2+2\left(\frac{a^2k^2}{4b^2c}+\frac{2a^2k^2c}{4b^4}\right)x+\frac{k^4}{16c^2}+\frac{a^2k^4}{4b^4}=0,$$

of

$$a^4x^2+2\,\frac{a^2(b^2+2c^2)k^2}{4c}\,x+\frac{k^4(b^2+2c^2)^2}{16c^2}=0,$$

d. i.

$$\left(a^2x+\frac{k^2(b^2+2c^2)}{4c}\right)^2=0.$$

De vergelijking van de *richtlijn* is dus $4a^2cx+k^2(b^2+2c^2)=0$.

a_2. Hier is $$p^4+(a^2-\mu)p^2=0,$$
of

$$a^2-\mu=-p^2.$$

Is aan deze voorwaarde voldaan, dan volgt uit (27)

$$(a^2-\mu)p+(2p-\beta)p^2=0,$$

of

$$-p^3+2p^3-p^2\beta=0,$$

of

$$p=\beta.$$

Voegt men echter $p=\beta$, $(a^2-\mu)=-\beta^2$ en $q=0$ in vergelijking (22) in, dan zal (22) geen twee samengevallen lijnen voorstellen, maar wel twee lijnen door O. Alle lijnen $y=Ax$ geven dus wel twee samengevallen snijpunten, maar van brandpunten is hier geen sprake. Deze oplossing vervalt dus.

Substitueert men bovenstaande waarden in (22), dan vindt men n.l.

$$(\beta x-\beta^2)^2+\beta^2(2\beta x-\beta^2)-(a^2+\beta^2)(x^2+y^2)=0,$$

of

$$\alpha^2 x^2 + (\alpha^2 + \beta^2)\, y^2 = 0.$$

b. Is $$\alpha^2 - \mu = 0,$$

dan vindt men uit (23)

$$-\alpha^2 (p^2 + q^2)^2 = 0$$

en uit (25)

$$\{(2p-\beta)^2 - \alpha^2\}(p^2+q^2)^2 = (2p-\beta)^2 (p^2+q^2)^2$$

Uit beide vergelijkingen volgt $p^2 + q^2 = 0$, dus $p = 0$ en $q = 0$. Hieruit leidt men ook geen brandpunten af.

c. Voor $$-\beta(p^2 + q^2) - (\alpha^2 - \mu)\, p = 0$$

is

$$\alpha^2 - \mu = -\frac{\beta}{p}(p^2 + q^2).$$

Substitueert men deze waarde van $\alpha^2 - \mu$ in (23), dan komt er na eenige herleiding

$$[-\beta(p^2 + q^2) - \alpha^2 p]\,(p - \beta) = \beta^2 q^2 \quad \ldots\ldots (28).$$

Vereenigt men eveneens bovenstaande voorwaarde met (25), dan vindt men

$$[p\,(2p - \beta)^2 - \beta(p^2 + q^2) - \alpha^2 p]\,(p - \beta) = [2(p - \beta)]^2 p^2,$$

of

$$p(\beta^2 - \alpha^2) - \beta(p^2 + q^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (29).$$

Uit (28) en (29) leidt men gemakkelijk af

$$-\beta^2 p(p - \beta) = \beta^2 q^2 \text{ of } \beta(p^2 + q^2) = \beta^2 p \quad \ldots\ldots (30).$$

Eindelijk leveren (29) en (30)

$$p\beta^2 - p\alpha^2 = p\beta^2,$$

of

$$p = 0.$$

Dan is q ook nul; dus deze oplossing geeft geen brandpunten.

Bij deze laatste herleidingen is gedeeld door $p^2 + q^2$ en door $p - b$; $p^2 + q^2 = 0$ kunnen we voorbijgaan, doch $p = b$ dient nog te worden onderzocht. In de eerste plaats zou dan uit (23) volgen $q = 0$ en verder $\alpha^2 - \mu = p^2 + q^2$; voegt men deze waarden in (22) in, dan ontstaat weer een vergelijking van twee lijnen door O, evenals sub a_2.

Men vindt dus slechts één gewoon brandpunt n.l. het punt $\left(-\frac{k^2}{2c}, 0\right)$.

Bovenstaande methode om de brandpunten te bepalen is omslachtig; toch heb ik haar willen volgen, omdat zij zich geheel aansluit bij de wijze, waarop de deferenten langs analytischen weg zijn gevonden. In elk geval levert zij het voordeel, dat we onmiddellijk de vergelijking van de richtlijn vinden.

Ook kan men aldus handelen:

De vergelijking der kromme is

$$[x^2 + y^2 - \beta x]^2 = \alpha^2(x^2 + y^2) \quad \ldots\ldots\ldots (31).$$

De vergelijking van een lijn door een der punten ω_1 of ω_2 en het punt (p, q) is

$$y - q = i(x - p) \text{ d.i. } y - ix = q - ip.$$

Wij bepalen de snijpunten van deze lijn met de kromme en zien aan welke voorwaarde p en q moeten voldoen, opdat die snijnunten samenvallen.

Uit $y - ix = q - ip$ volgt

$$y + ix = q - ip + 2ix$$

en uit deze beide betrekkingen

$$x^2 + y^2 = (q - ip)(q - ip + 2ix).$$

Substitueer deze waarde van $x^2 + y^2$ in (31), dan vindt men

$$[(q - ip)(q - ip + 2ix) - \beta x]^2 = \alpha^2(q - ip)(q - ip + 2ix),$$

of

$$\{(q - ip)^2 + [2i(q - ip) - \beta]x\}^2 = \alpha^2(q - ip)^2 + 2i\alpha^2(q - ip)x.$$

Deze vergelijking heeft twee gelijke wortels onder de voorwaarde

$$[2i(q - ip) - \beta]^2(q - ip)^2[(q - ip)^2 - \alpha^2] =$$
$$= \{(q - ip)^2[2i(q - ip) - \beta] - i\alpha^2(q - ip)\}^2.$$

Noemen we $q - ip$ ter verkorting r, dan komt er

$$(2ir - \beta)^2(r^2 - \alpha^2) = (2ir^2 - \beta r - i\alpha^2)^2,$$

of achtereenvolgens

$$(2ir - \beta)^2(r^2 - \alpha^2) = [(2ir - \beta)r - i\alpha^2]^2,$$

$$-\alpha^2(2ir - \beta)^2 = -\alpha^4 - 2i\alpha^2 r(2ir - \beta),$$

$$\alpha^2 + 2ir(2ir - \beta) - (2ir - \beta)^2 = 0,$$

$$\alpha^2 + (2ir - \beta)\beta = 0,$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2i\beta(q - ip) = 0,$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2\beta p = 0 \text{ en } q = 0,$$

$$p = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\beta} \text{ en } q = 0.$$

Derhalve vindt men een en het zelfde brandpunt als op pag 58.

Voortbrenging van de limaçon van Pascal.

Wanneer men een kegelsnede uit een harer brandpunten inverteert, blijft een der symmetrie-assen bestaan, terwijl de andere in een cirkel overgaat; wij moeten hier dus één wijze van voortbrenging overhouden door middel van richtcirkel en deferent. De richtcirkel heeft tot middelpunt het gewone brandpunt van de limaçon; zij het de cirkel [F] (fig. 10). De deferent moet hier een kegelsnede zijn, waarvan de brandpunten zijn samengevallen in het gevonden afzonderlijk brandpunt van de kromme. Deze deferent wordt dus een cirkel [G], waarvan G het middelpunt is. Aangezien de deferent door het dubbelpunt gaat, zullen deze en de richtcirkel elkaar in O_1 aanraken.

Wij krijgen nu de kromme als omhullende van cirkels, die hun middelpunten hebben op [G] en die [F] loodrecht snijden; of ook als meetkundige plaats van grenspunten van cirkelbundels, waarvan elke bundel bepaald is door [F] en door een raaklijn aan [G]. Op deze laatste wijze zijn de punten P_1 en P_2 bepaald.

We hebben gevonden $O_1F = -\frac{k^2}{2c}$ en $O_1G = \frac{ck^2}{2b^2}$. Is b^2 positief, dus als we uitgaan van een ellips, dan ligt G rechts van O_1 en raken de cirkels elkaar uitwendig. Is b^2 negatief, dus als men een hyperbool inverteert, dan ligt G links van O_1 en raken de cirkels elkaar inwendig en wel zóó, dat de richtcirkel binnen den deferent ligt, omdat, wat de absolute waarde betreft, $\frac{k^2}{2c} < \frac{ck^2}{2b^2}$ is. Immers dan is $c^2 = a^2 + b^2$.

In het eerste geval vindt men een kromme met een geïsoleerd punt en in het tweede een kromme met een knooppunt.

Dit blijkt ook als men van de kromme, voorgesteld door

$$\frac{k^4}{a^2}x^2 + \frac{k^4}{b^2}y^2 + \frac{2ck^2}{a^2}x(x^2+y^2) = \frac{b^2}{a^2}(x^2+y^2)^2,$$

de vergelijking der dubbelpuntsraaklijnen bepaalt; deze is

$$\frac{k^4}{a^2}x^2 + \frac{k^4}{b^2}y^2 = 0.$$

Volledigheidshalve kunnen we nog aantoonen, dat we op de aangegeven wijze werkelijk de limaçon van PASCAL voortbrengen, door de vergelijking af te leiden van de meetkundige plaats der punten P_1 en P_2 (fig. 10).

Stelt men $O_1G = R$, $O_1F = r$, $\angle O_1GR = \psi$ en $RP_1 = \varrho$, dan zijn de coördinaten van het punt R

$$x = R(1 - \cos\psi) \text{ en } y = R\sin\psi,$$

en is

$$\varrho^2 = (R + r - R\cos\psi)^2 + R^2\sin^2\psi - r^2 = 2R^2 + 2Rr - 2R(R+r)\cos\psi.$$

De vergelijking van den cirkel [R] wordt dan

$$[x - (R - R\cos\psi)]^2 + [y - R\sin\psi)^2 = 2[R^2 + Rr - R(R+r)\cos\psi],$$

of eenvoudiger

$$x^2 + y^2 - 2Rx - 2Rr = -2R[(r + x)\cos\psi - y\sin\psi].$$

De vergelijking van de lijn FP_1 is $-\dfrac{y}{x + r} = \operatorname{tg}\psi$.

Uit de beide laatste vergelijkingen elimineert men nu ψ door voor de vergelijking van den cirkel te schrijven

$$x^2 + y^2 - 2Rx - 2Rr = -2R[(r + x) - y\operatorname{tg}\psi]\cos\psi,$$

en hierin te substitueeren

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{y}{x + r} \text{ en } \cos\psi = \frac{x + r}{\sqrt{y^2 + (x + r)^2}}.$$

Dan komt er

$$x^2 + y^2 - 2Rx - 2Rr = -2R\left[(r + x) + \frac{y^2}{x + r}\right]\frac{x + r}{\sqrt{y^2 + (x + r)^2}},$$

of

$$x^2 + y^2 - 2Rx - 2Rr = -2R\sqrt{y^2 + (x + r)^2}.$$

Door beide leden van deze vergelijking in het kwadraat te brengen vindt men na eenige herleiding

$$(x^2 + y^2 - 2Rr)^2 = 4(R^2 + Rr)(x^2 + y^2).$$

Substitueert men eindelijk $R = \frac{1}{2}\beta$ en $r = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta}$, dan komt de vroeger gevonden vergelijking van de limaçon te voorschijn; n.l.

$$(x^2 + y^2 - \beta x)^2 = \alpha^2(x^2 + y^2).$$

De limaçon van PASCAL kan men punt voor punt construeeren,

door koorden te trekken door een vast punt van een cirkelomtrek en op die koorden uit het tweede snijpunt een constante lijn af te zetten.

Zal deze constructie met de hier gegeven voortbrengingsmethode overeenkomen, dan moet, aangezien de deferent de bedoelde cirkel en O_1 het vaste punt is, $CP_1 = BP_2$ en onafhankelijk van ψ zijn.

Dit blijkt uit het volgende. De driehoeken P_1CR en P_2BR zijn congruent; want $\angle P_1CR = \angle P_2BR$, $\angle O_1P_1R = \angle O_1P_2R$ (omdat P_1, P_2, O_1 en R op een cirkel liggen), en $RP_1 = RP_2$. Derhalve is $P_1C = P_2B$. Ook volgt uit de congruentie der beide driehoeken, dat $RB = RC$ is; dus GR deelt $\angle$ BRC middendoor en we hebben $\angle P_1RP_2 = \angle BRC$.

Verder blijkt gemakkelijk uit de figuur

$$\angle GRT = \angle BRP_2 = \angle CRP_1 = 90°;$$

$$RS = (R + r) \sin \psi, \quad MR = R \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \psi, \quad RT = 2R \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \psi;$$

$$RP_1^2 = 2R (R + r) \sin \psi \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \psi = 4R (R + r) \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi,$$

$$\text{of } \frac{RP_1^2}{\sin^2 \frac{1}{2} \psi} = 4R (R + r).$$

Daar $P_1C = \dfrac{RP_1}{\sin \frac{1}{2} \psi}$ is, vindt men $\overline{P_1C}^2 = 4R (R + r)$ onafhankelijk van ψ.

De limaçon is ook nog voort te brengen als meetkundige plaats van snijpunten van de overeenkomstige elementen van een cirkelbundel, waarvan alle cirkels FG aanraken in O_1, en een stralenbundel, daarmede projectief verwant, waarvan de top in F ligt. De bij een bepaalden cirkel behoorende straal wordt gevonden door het snijpunt R te verbinden met G en dan door F een lijn te trekken evenwijdig aan die verbindingslijn.

De limaçon met een keerpunt in O_1 (cardioïde) ontstaat als men een parabool uit haar brandpunt inverteert. Het brandpunt F zal door het optreden van dit keerpunt verdwijnen, zoodat er geen enkel gewoon brandpunt overblijft.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Een cyclique met p symmetrie-vlakken ($p = 1$, 2 of 3) is op p verschillende wijzen de omhullende van bollen, die hun middelpunten hebben op een kegelsnede en die den bol, waarop de cyclique ligt, loodrecht snijden.

II.

De meetkundige plaats der brandpunten van een cyclique met een dubbelpunt bestaat uit twee andere cycliques eveneens van het geslacht nul; deze drie krommen vormen met den cirkel in het oneindige (zesmaal geteld) de dubbelkromme van een ontwikkelbaar oppervlak van den twaafden graad, waarvan c_∞ en een der cycliques de richtlijnen zijn.

III.

Bij de constructie van een algemeene kromme van den derden graad volgens de methode van SCHRÖTER *(Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* S. 11, § 3) is het aan te bevelen, in plaats van de hulpkegelsnede twee cirkels te nemen, waarvan de eene raakt aan de raaklijn AT_1 in het punt A en de andere aan de raaklijn A_1T_1 in het punt A_1.

IV.

Ten onrechte zegt Ch. Sturm (*Cours d'Analyse*, tome second, neuvième édition, p. 72).

En éliminant c entre les deux équations de chacun de ces derniers systèmes, on obtiendra les solutions singulières de l'équation proposée, pourvu qu'on omette les valeurs de c qui rendent simultanément nulles, ou infinies, les deux fonctions $\frac{dF}{dc}$ et $\frac{dF}{dy}$.

V.

De onderstelling, dat de beide wijzen, waarop $\dfrac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}}$ onbepaald kan worden n.l. als $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$, dezelfde rol spelen ten opzichte van de afzonderlijke oplossing eener differentiaal-vergelijking met de algemeene integraal $F(x, y, c) = 0$, is onjuist.

VI.

Wanneer men een negatief getal opvat als het verschil van twee getallen, waarvan het aftrektal kleiner is dan de aftrekker, zoo is de Algebra slechts een uitbreiding van de Rekenkunde.

VII.

Ten onrechte meent DUNÉR (*Recherches sur la Rotation du Soleil*, p. 74), dat uit de formule $\xi = \frac{D\nu}{2\pi R} 360^0$ de werkelijke dagelijksche rotatiehoek van een materiëel punt op den zonsaequator wordt gevonden.

VIII.

De bewering van LIPPMANN (*Journal de Physique*, tome VIII, p. 402), dat de attractieconstante alleen afhangt van de tijdseenheid, is onjuist.

IX.

Het invoeren van de door LIPPMANN voorgestelde tijdseenheid is niet aan te bevelen, omdat zij uit een didaktisch oogpunt onpraktisch is en op ongeoorloofde gronden berust.

X.

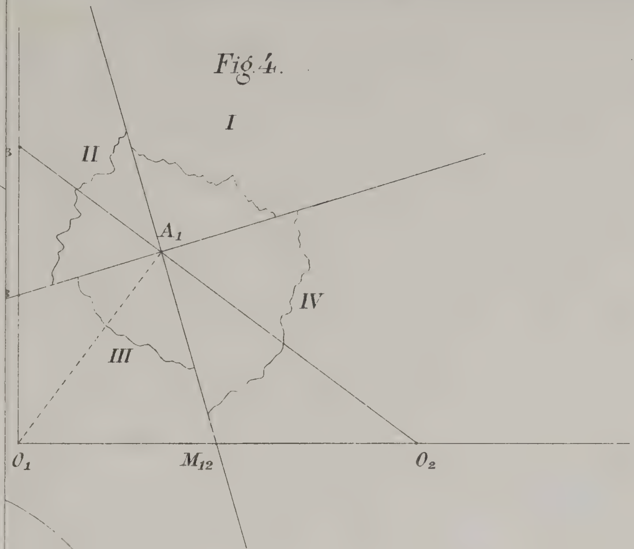
Het is af te keuren bij een elementaire behandeling der Natuur- en Werktuigkunde verschillende formules te willen afleiden, welke slechts bewezen kunnen worden met behulp van de Differentiaalrekening.

XI.

Bij de afleiding van de formule voor den electrischen druk door C. A. Mebius (*Wied. Ann.* 61, p. 638, 1897), wordt slechts schijnbaar van een kringproces gebruik gemaakt.

XII.

Het is wenschelijk dat zij, die het eind-examen eener Hoogere Burgerschool met vijfjarigen cursus hebben afgelegd, toegang tot de studie in de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen en de Geneeskunde verkrijgen. Het adres, onlangs door de Faculteit der Wis- en Natuurkunde aan de Universiteit te Amsterdam tot het Ministerie van Binnenlandsche Zaken gericht, verdient dus geen aanbeveling.



Π_3

[M]

Fig. 6.

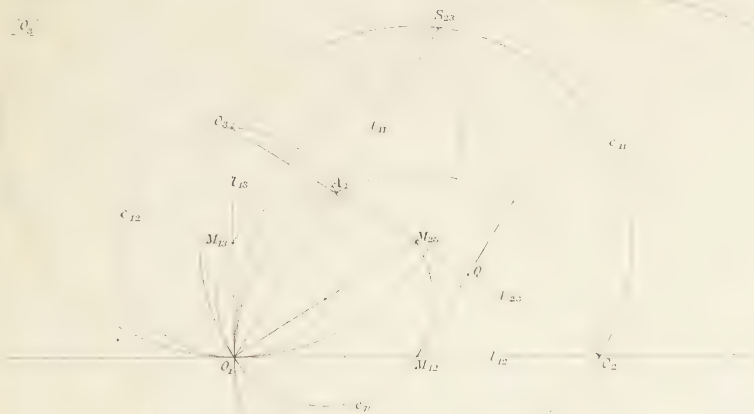
K_2

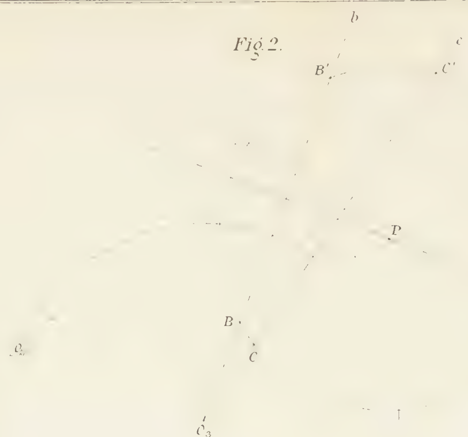
Π_4

$[O_2]$

U

O_2


Fig. 1.


Fig. 2.

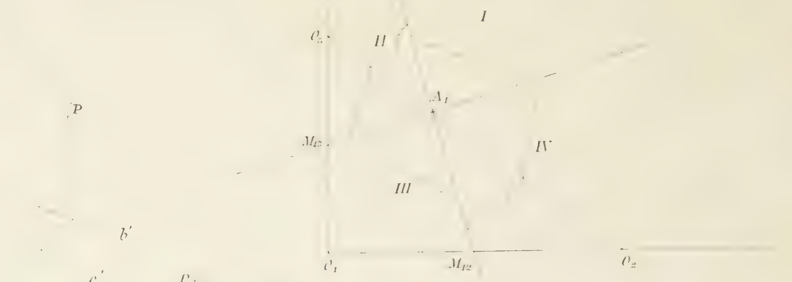
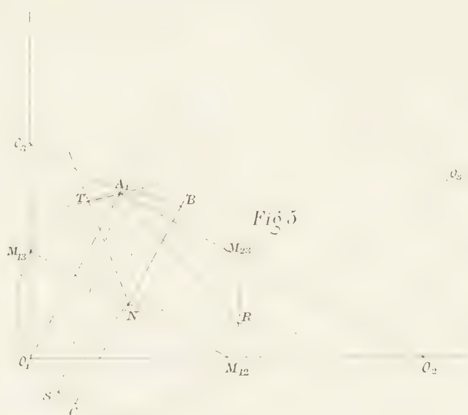

Fig. 4.


Fig. 3.


Fig. 5.

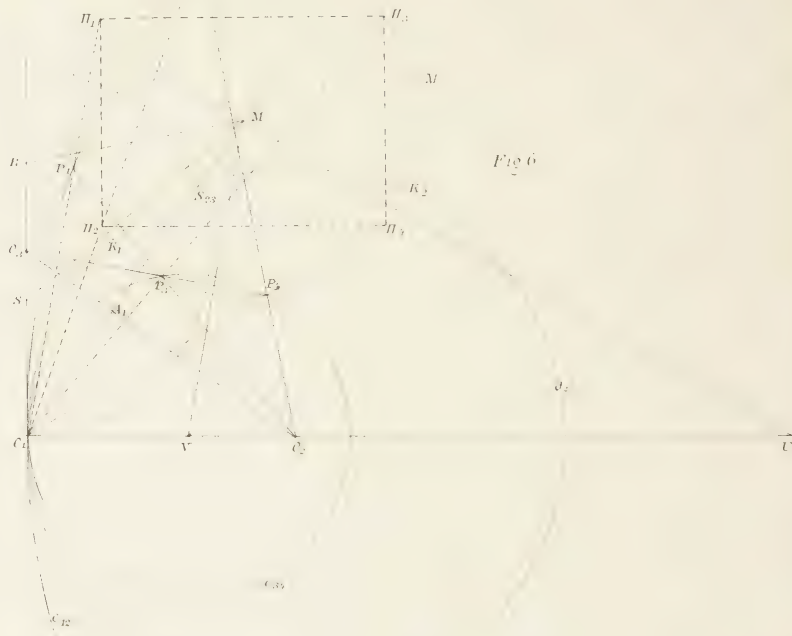

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8

Fig. 8.

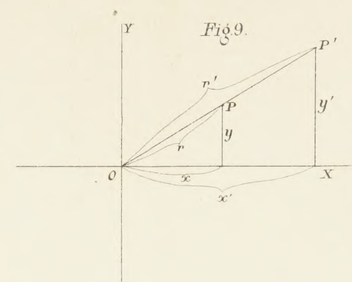


Fig. 7.

Fig. 10.


BAL